Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

TEORIE OBVODŮ II

Učební text

Jaromír Kijonka a kol.

Ostrava 2007

Recenze: Prof. Ing. Josef Paleček, CSc.

Název: Teorie obvodů II
Autor: Jaromír Kijonka a kol.
Vydání: první, 2007
Počet stran: 157
Vydavatel: VŠB – TUO

Studijní materiály pro studijní program Elektrotechnika fakulty elektrotechniky a informatiky
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:
Operační program Rozvoj lidských zdrojů
Název: E-learningové prvky pro podporu výuky odborných a technických předmětů
Číslo: CZ.O4.01.3/3.2.15.2/0326
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

ISBN 978-80-248-1489-6

POKYNY KE STUDIU

Prerekvizity

Pro studium předmětu Teorie obvodů II se předpokládá absolvování předmětu Teorie obvodů I.

Cílem předmětu

Cíl předmětu je naučit studenty analyzovat jevy ve vícefázových soustavách, v přechodných jevech, v dvojhranech, obvodech s nastavitelnými a rozprostřenými parametry.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského studia studijních programů Elektrotechnika, Projektování elektrických zařízení a Mechatronika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru.

Obsah

1. Trojfázové obvody, zapojení zdrojů a spotřebičů v trojfázových obvodech, analýza obvodů při harmonickém napájení

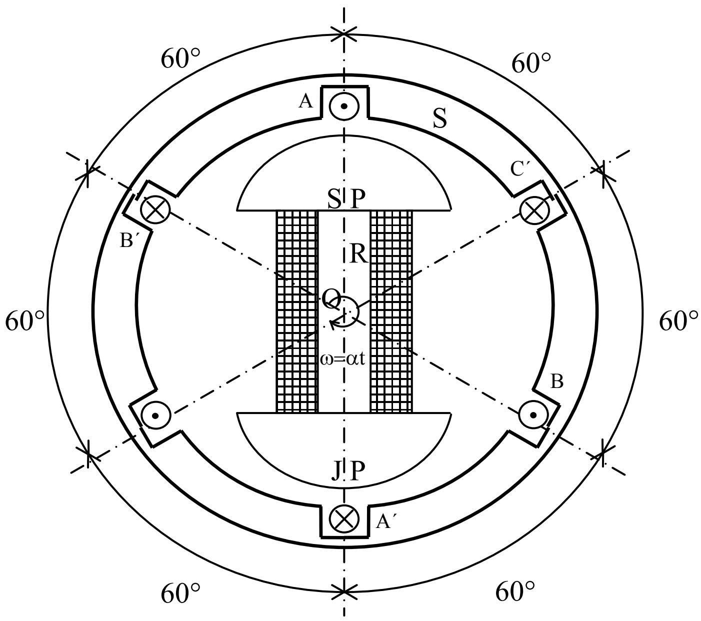
Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: po prostudování tohoto odstavce budete umět:

- spojovat zdroje a spotřebiče do trojfázových obvodů,
- definovat vzájemný poměr fázových a sdružených (síťových)
- obvodových veličin při zapojení do hvězdy i do trojúhelníka,
- analyzovat jednoduché trojfázové obvody v ustáleném stavu,
- analyzovat jednoduché poruchové stavy v trojfázových obvodech.

Výklad

1.1 Úvod a základní pojmy



Obr. 1 *Příčný schematický řez trojfázovým generátorem*

Značky ve vodičích označují směr proudu X je směr do papíru, tečka směr z papíru.

Zdroje trojfázové elektrické energie jsou trojfázové generátory. Jsou to vlastně tři jednofázové generátory v jednom konstrukčním celku. Na obr. 1 vidíme příčný řez schematicky znázorněného trojfázového generátoru. Rotor (otáčivá část) R je tvořený elektromagnetem, napájeným stejnosměrným proudem, který se otáčí kolem osy O. Stator S z dynamových plechů má po obvodě drážky a v nich vinutí jednotlivých fází, v našem příkladě je to 6 drážek - tedy na každou fázi jedna cívka (ve skutečných strojích bývá na jednu fázi cívek a tedy i drážek mnohem více) s roztečí 60°, v kterých jsou umístěna vinutí jednotlivých fází a – a´, b – b´, c – c´, kde a, b, c jsou „začátky“ a a´,b´,c´ „konce“ fází.

Sled fází (např. začátků) a – b – c je takový, že při otáčení rotoru se dostává jeho severní pól SP nejprve pod začátek fáze a, potom b a nakonec c. V jednotlivých vinutích (fázích) statoru se indukují následkem pohybové elektromagnetické indukce střídavá napětí o okamžitých hodnotách u_A, u_B a u_C, které mají všechny stejnou frekvenci (periodu). Vhodným tvarem pólových nástavců SP a JP se dosahuje, že rozložení indukce magnetického pole B (hustoty magnetického toku Φ) ve vzduchové mezeře mezi nástavcem a statorem je prakticky harmonické (sinusové):

$$B_t = B_m \cdot \sin\alpha \tag{1}$$

Jestliže se rotor otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω, můžeme úhel otáčení α vyjádřit pomocí času $\alpha = \omega \cdot t + \psi_A$, takže

$$u_A = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_A) \tag{2}$$

a když položíme počáteční fázi napětí ve fázi A $\psi_A = 0$, potom

$$u_A = \mathrm{U}_m \cdot \sin\omega \cdot t \tag{3}$$

Napětí indukované ve fázi b má stejnou frekvenci, ale je vůči napětí u_A fázově posunuté o úhel $-\frac{2\pi}{3}(-120°)$, protože začátek fáze b je o -120° pootočený vůči začátku fáze a. Severní pól rotoru se dostane pod začátek fáze b o dobu T/3 (je-li T doba jedné otáčky) později a tomu odpovídá úhel 120°. Podobně napětí indukované do fáze c je vůči u_A posunuté o mínus 240° resp. o +120°. V trojfázovém generátoru se tedy indukuje soustava třech napětí o stejném kmitočtu, ale o různých fázích. Proto nazýváme vinutí, v kterých se indukují napětí o různých fázích stručně také fázemi.

Trojfázovou soustavu napětí můžeme tedy vyjádřit analyticky:

$$\begin{aligned} u_A &= U_{mA} \cdot \sin\omega \cdot t \\ u_B &= U_{mB} \cdot \sin(\omega \cdot t + 120°) \\ u_C &= U_{mC} \cdot \sin(\omega \cdot t - 120°) \end{aligned} \tag{4}$$

U běžných trojfázových generátorů, které jsou konstruované geometricky souměrně (podobně jako schematický model na *obr. 1*), jsou maximální hodnoty indukovaných napětí v jednotlivých fázích stejné:

$$U_{mA} = U_{mB} = U_{mC} = U_m \tag{5}$$

Fázové rozdíly dvou za sebou jdoucích fázových napětí jsou také stejné a rovnají se

$$\Psi_{UA} - \Psi_{UB} = \Psi_{UB} - \Psi_{UC} = \Psi_{UC} - \Psi_{UA} = \frac{360°}{3} = 120° \tag{6}$$

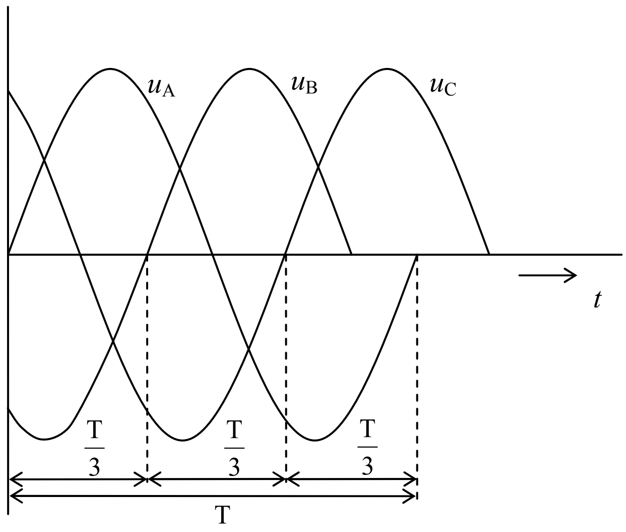
Okamžité hodnoty napětí jsou potom dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} u_A &= U_m \cdot \sin\omega \cdot t \\ u_B &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 120°) \\ u_C &= U_m \cdot \sin(\omega \cdot t + 120°) \end{aligned} \tag{7}$$

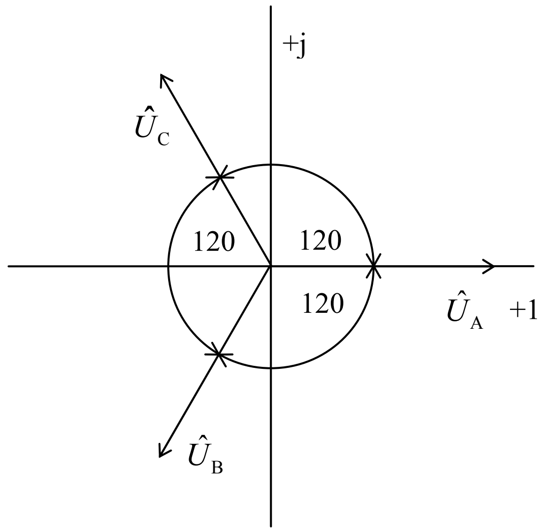
a tvoří tzv. souměrnou soustavu napětí - *obr. 2*. Fázory napětí jednotlivých fází souměrné soustavy napětí jsou dány vztahy:

$$\hat{U}_{\mathrm{A}} = U \; .e^{j0^\circ}, \quad \hat{U}_{\mathrm{B}} = U \; \cdot e^{-j120^\circ}, \quad \hat{U}_{\mathrm{c}} = U \; \cdot e^{+j120^\circ} \tag{8}$$

a příslušný fázorový diagram je na *obr. 3*. Jedno napětí, obvykle $\hat{U}_{\mathrm{A}}$ položíme do reálné osy. Vidíme, že koncové body fázorů $\hat{U}_{\mathrm{A}}$, $\hat{U}_B$ a $\hat{U}_C$ leží na kružnici opsané z počátku komplexní roviny. Úhly mezi dvěma za sebou jdoucími fázory jsou 120°. Protože běžné trojfázové generátory dodávají souměrnou soustavu napětí, je tento druh napájení trojfázových obvodů (sítí) nejčastější.



***Obr. 2** Časový průběh napětí*



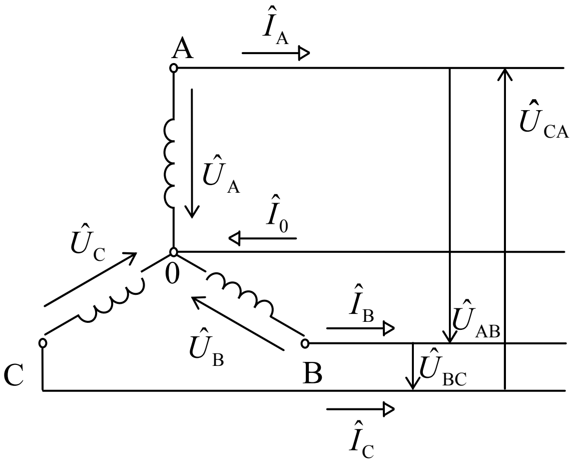
***Obr. 3** Fázory napětí*

Když není splněna podmínka (5) nebo (6) nebo ani (5) ani (6) současně, hovoříme o nesouměrné soustavě napětí. Podobně rozeznáváme a definujeme i souměrnou a nesouměrnou soustavu proudu.

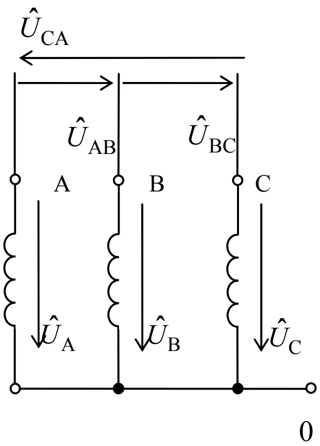
1.2 Způsoby spojování fází trojfázových generátorů a spotřebičů

❑ Zapojení do hvězdy

Při tomto způsobu spojíme do uzlu (středu), zvaného nulový bod buď začátky nebo konce vinutí fází generátoru A´, B´ a C´ a ze začátků A, B a C vyvedeme tři linkové vodiče vedení. Z nulového bodu se vyvede obvykle čtvrtý tzv. střední vodič (tento vodič se vyvést nemusí). Spojení do hvězdy označujeme písmenem Y.



Obr. 4 *Zapojení vinutí do hvězdy*



Obr. 5 *Zapojení vinutí do hvězdy*

Zapojení vinutí točivých strojů (motorů a generátorů) se kreslí schematicky obvykle podle *obr. 4.* U transformátorů (statických strojů) je obvyklejší způsob podle *obr. 5.*

Při zapojení do hvězdy můžeme naměřit dva druhy napětí: fázové a sdružené. Na jednotlivých fázích generátoru, nebo trojfázového spotřebiče, případně mezi linkovými vodiči a středním vodičem čtyřvodičového vedení naměříme fázová napětí $\hat{U}_A$, $\hat{U}_B$, $\hat{U}_C$. Budeme je značit jediným indexem, odpovídajícím dané fázi nebo indexem „f" - U_f. Počítací šipky vyjadřující předpokládanou orientaci fázových napětí budeme jednotlivě volit vždy od volného konce (začátku) k vázanému konci, tj. k nulovému bodu 0 – *obr. 6*. Takováto volba orientace počítacích šipek je v souladu s volbou počítacích šipek a také svorkového napětí stejnosměrných, resp. jednofázových generátorů. V silnoproudé elektrotechnice je však velmi častá opačná volba orientace počítacích šipek podle obr. 7. Samozřejmě jsou oba způsoby rovnocenné a je věcí dohody, který z nich použijeme.

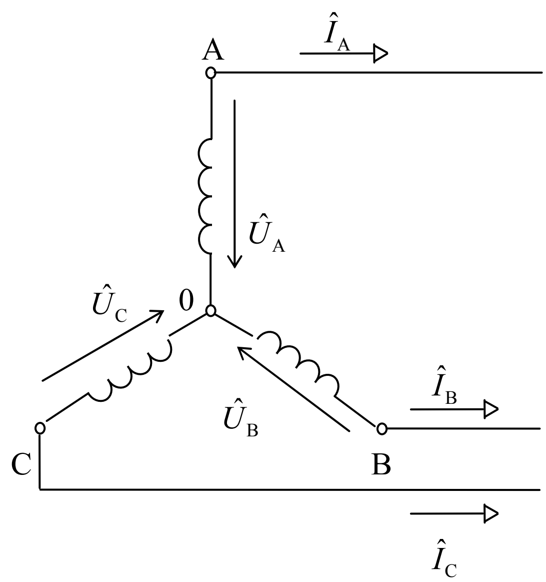
Mezi dvěma libovolnými volnými konci (tj. začátky) dvou fází naměříme sdružená napětí (také se jim říká síťová napětí), budeme je značit dvěma indexy $\hat{U}_{AB}$, $\hat{U}_{BC}$ a $\hat{U}_{CA}$. nebo indexem „s" U_s.

Jestliže zatížíme trojfázový generátor zapojený do hvězdy, protékají linkovými vodiči proudy $\hat{I}_A$, $\hat{I}_B$ a $\hat{I}_C$, které jsou shodné s proudy tekoucími jednotlivými fázemi generátoru nebo spotřebiče, jak je vidět na *obr. 6*. Při spojení do hvězdy tedy platí, že síťové (linkové) proudy jsou shodné s proudy fázovými ($I_f = I_s$). Při nesymetrickém provozu protéká středním vodičem tzv. vyrovnávací proud (význam vysvětlen dále) $\hat{I}_0$, jehož počítací šipku orientujeme opačně než u linkových proudů, tedy směrem ke generátoru. Jestliže aplikujeme na nulový bod generátoru uzlový zákon, dostaneme vztah mezi vyrovnávacím a linkovými proudy:

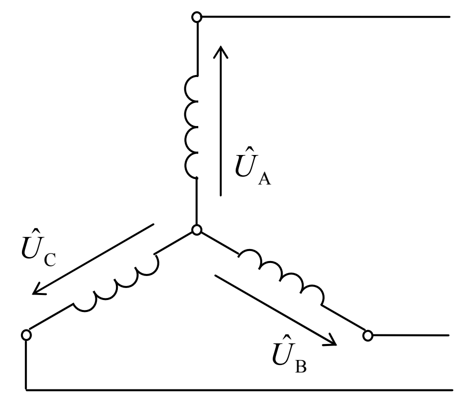
$$\hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C = \hat{I}_0 \qquad (9)$$

Jestliže střední vodič není vyveden, nemůže vyrovnávací proud protékat a potom platí:

$$\hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C = 0 \qquad (10)$$



Obr. 6 *Orientace šipek fázových fázových napětí hvězdy*



Obr. *7 Jiný způsob orientace šipek napětí u hvězdy*

Aplikováním smyčkového zákona na (neuzavřené) smyčky A – B – 0, B – C – 0 a C – A – 0 dostaneme vztahy mezi fázovými a sdruženými (síťovými) napětími:

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A - \hat{U}_B\,,\quad \hat{U}_{BC} = \hat{U}_B - \hat{U}_C\,,\quad \hat{U}_{CA} = \hat{U}_C - \hat{U}_A \tag{11}$$

Z (11) vidíme výhodu zavedeného označení sdružených a fázových napětí: dané sdružené napětí můžeme automaticky vyjádřit jako rozdíl dvou fázových napětí, jejichž indexy jsou stejné jako indexy daného sdruženého napětí včetně pořadí. Jestliže sčítáme levé a pravé strany rovnic (11), dostaneme důležitý závěr:

$$\hat{U}_{AB} + \hat{U}_{BC} + \hat{U}_{CA} = \hat{U}_A - \hat{U}_B + \hat{U}_B - \hat{U}_C + \hat{U}_C - \hat{U}_A = 0 \tag{12}$$

Součet fázorů sdružených napětí trojfázové soustavy je roven nule.

Fázorový diagram napětí z *obr. 4* je nakreslený na *obr. 8*, kde fázová napětí směřují z nuly do bodů A, B a C, zatímco ve schématu na *obr. 6* z bodů A, B, C do nuly. Podobně sdružená napětí $\hat{U}_{AB}$, $\hat{U}_{BC}$ a $\hat{U}_{CA}$ jsou orientované ve schématu od bodu A do B resp. od B do C a od C do A, kdežto v diagramu naopak.

Z fázorového diagramu na *obr. 8* můžeme lehko geometricky odvodit vztah mezi velikostmi sdružených a fázových napětí. Pro trojúhelník platí:

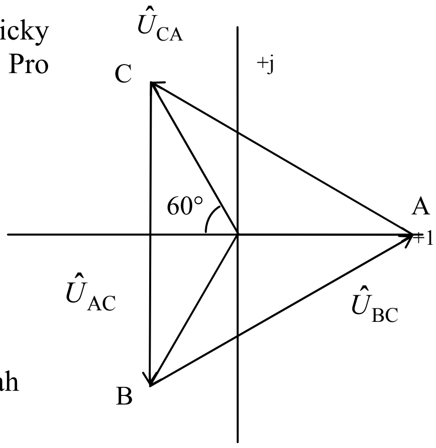
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{U_s/2}{U_f} = \frac{U_s}{2U_f} \quad \text{a z toho}$$

$$U_s = \sqrt{3}.U_f \doteq 1{,}73.U_f \qquad (13)$$

Z fázorového diagramu můžeme též geometricky odvodit vztah mezi fázovými napětími souměrné soustavy:

$$\hat{U}_A + \hat{U}_B + \hat{U}_C = 0 \qquad (14)$$

Součet fázových napětí je při souměrnosti soustavy roven nule.

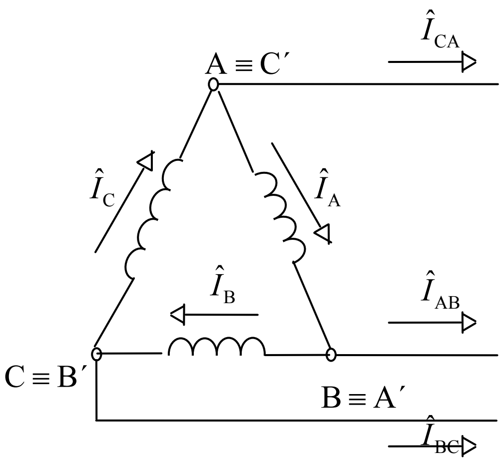


Obr. 8 *Fázorový diagram napětí*

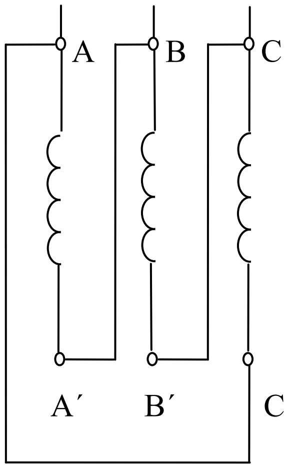
❑ Zapojení do trojúhelníka

Při tomto způsobu spojíme navzájem konec vinutí jedné fáze se začátkem sousední fáze, takže tři fáze tvoří trojúhelník. Z těchto tří bodů spojení vyvedeme trojvodičové vedení. Počet vodičů vedení je vždy tři. Způsoby kreslení schémat vidíme na *obr. 9* pro točivé stroje a na *obr. 10* pro statické stroje např. transformátory. Spojení do trojúhelníku značíme písmenem D.

Z uvedených schémat je patrný i způsob volby orientace počítacích šipek a označení napětí a proudů. Při zapojení do trojúhelníka existuje jen jeden druh napětí. Napětí na fázích generátoru jsou totožná s napětími mezi linkovými vodiči. Při spojeni do trojúhelníka je tedy fázové a sdružené napětí shodné ($U_f = U_s$). Při tomto spojení jsou ovšem rozdílné proudy síťové (linkové), ty budeme je označovat dvěma indexy, tedy $\hat{I}_{AB}, \hat{I}_{BC}, \hat{I}_{CA}$ nebo indexem „s" $\hat{I}_s$ a proudy fázové v jednotlivých fázích generátoru (a podobně i trojfázového spotřebiče zapojeného do trojúhelníka) ty budeme označovat s jedním indexem fázové $\hat{I}_A, \hat{I}_B, \hat{I}_C$, ($\hat{I}_f$). Fázové proudy orientujeme tak, aby platily vztahy (15) a (16) - *obr. 10.*



Obr. 9 *Zapojení fází generátoru do trojúhelníka*



Obr. 10 *Zapojení fází transformátoru do trojúhelníka*

Sčítáním levých a pravých stran rovnic (15) dostaneme:

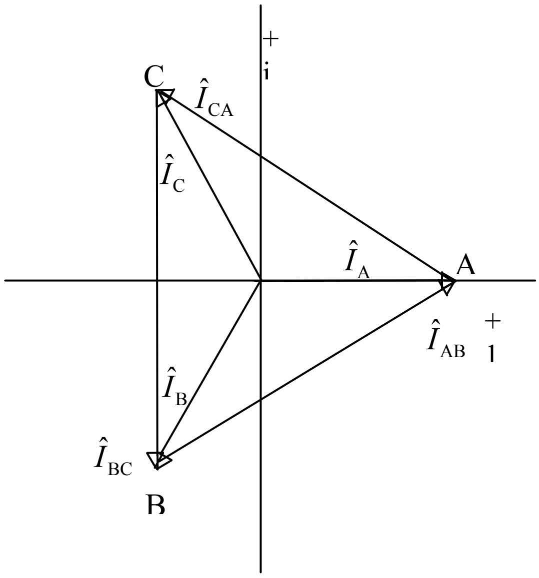
$$\hat{I}_{\mathrm{AB}} + \hat{I}_{\mathrm{BC}} + \hat{I}_{\mathrm{CA}} = \hat{I}_{\mathrm{A}} - \hat{I}_{\mathrm{B}} + \hat{I}_{\mathrm{B}} - \hat{I}_{\mathrm{C}} + \hat{I}_{\mathrm{C}} - \hat{I}_{\mathrm{A}} = 0 \tag{16}$$

tj. fázorový součet linkových proudů se rovná nule. Aplikací smyčkového zákona na schéma z *obr. 9* dostaneme, součet že fázorů síťových napětí se také rovná nule:

$$\hat{U}_{\mathrm{AB}} + \hat{U}_{\mathrm{BC}} + \hat{U}_{\mathrm{CA}} = 0 \tag{17}$$

Vztahy (16) a (17) platí pro souměrnou i nesouměrnou soustavu. Naproti tomu součet fázorů fázových proudů je nulový jen tehdy, když tyto proudy tvoří také souměrnou soustavu, v obecném případě však ne. Jak uvidíme, tvoří proudy (a to linkové i fázové) tehdy souměrnou soustavu, jestliže zdroj <u>souměrného</u> napětí napájí <u>souměrný</u> spotřebič. Trojfázový spotřebič je tedy souměrný, jestliže jsou komplexní impedance (případně admitance) všech jeho fází stejné:

$$\hat{Z}_{\mathrm{A}} = \hat{Z}_{\mathrm{B}} = \hat{Z}_{\mathrm{C}} = \hat{Z} \tag{18}$$



Obr. 11 *Fázorový diagram proudů*

Musí se tedy rovnat moduly (velikosti) i verzory impedancí všech fází spotřebiče. Jestliže takovýto spotřebič je napájen souměrnou soustavou napětí, tvoří fázory linkových proudů rovnostranný trojúhelník - *obr. 11*. Pro linkové (síťové) a fázové proudy platí potom vztahy:

$$I_{\mathrm{AB}} = I_{\mathrm{BC}} = I_{\mathrm{CA}} = I_{\mathrm{f}}\,, \quad I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{B}} = I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{s}}\,, \quad I_{\mathrm{s}} = \sqrt{3} I_{\mathrm{f}} \doteq 1{,}73\, I_{\mathrm{f}} \tag{19}$$

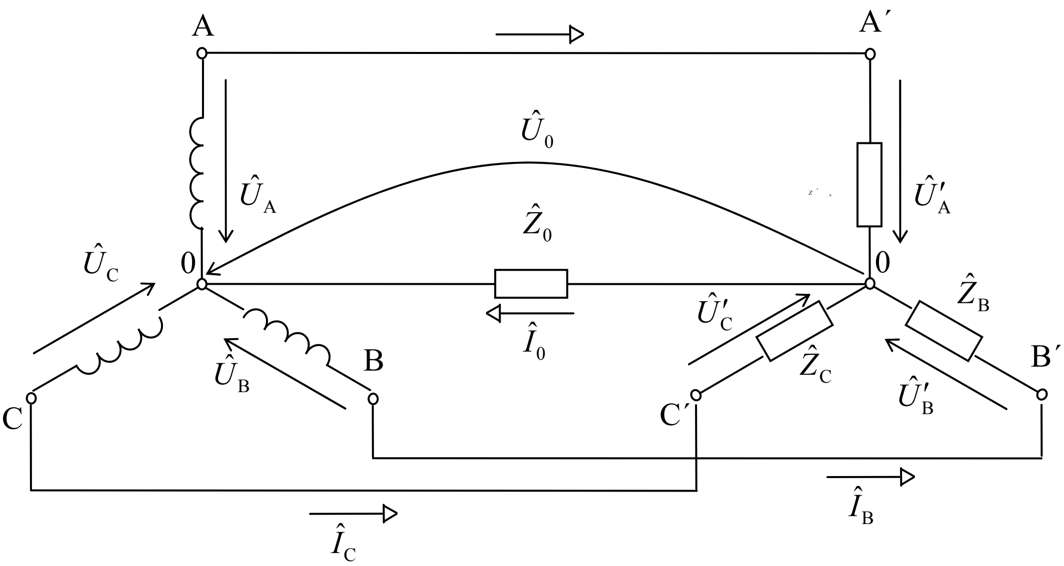
1.3 Řešení trojfázových obvodů

Trojfázové obvody můžeme řešit přímou aplikací Ohmova a Kirchhoffových zákonů. Taktéž můžeme použít podle okolností některou z metod řešení lineárních obvodů, tak jako by se jednalo o vícesmyčkový jednofázový obvod. V tomto oddílu nám však půjde o to, odvodit si na základě právě zmíněných metod vztahy a postupy, umožňující co nejpohodlnější a nejrychlejší řešení různých druhů trojfázových obvodů.

❑ Řešení trojfázových obvodů

a) Zdroj souměrný, zátěž nesouměrná

Tento případ se v praxi vyskytuje velmi často v sítích nn. Příslušný obvod je nakreslený na *obr. 12*. Impedance linkových vodičů buď zanedbáme, nebo jsou již připočítané k impedancím jednotlivých fází spotřebiče, s kterými jsou zapojeny do série. Impedanci středního vodiče musíme však uvažovat, protože tuto nemůžeme jednoduchým způsobem přičítat k impedancím fází spotřebiče a jak uvidíme, její velikost značně ovlivňuje poměry v obvodě.



Obr. 12 *Souměrný generátor do Y napájí nesouměrnou zátěž do Y*

Obvod má tři nezávislé smyčky, ale jen jeden nezávislý uzel. Metoda smyčkových proudů by byla nevhodná, protože by vedla na řešení třech smyčkových rovnic o třech neznámých. Obvod můžeme poměrně rychle vyřešit metodou paralelních generátorů, jak to jasně vidíme z překresleného schema na *obr. 13*. Napětí $\hat{U}_0$ je potom dáno vztahem:

$$\hat{U}_0 = \frac{\sum \hat{Y}_i \hat{U}_i}{\sum \hat{Y}_i} = \frac{\hat{Y}_A \hat{U}_A + \hat{Y}_B \hat{U}_B + \hat{Y}_C \hat{U}_C}{\hat{Y}_A + \hat{Y}_B + \hat{Y}_C + \hat{Y}_0} \tag{20}$$

Napětí na jednotlivých fázích spotřebiče dostaneme aplikací smyčkového zákona na smyčky A – 0 – 0´ – A´ – A ; B – 0 – 0´ – B´ – B a C – 0 – 0´ – C´ – C:

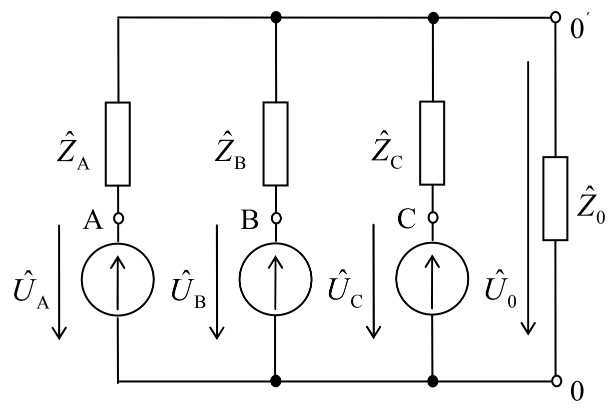
$$\begin{aligned} \hat{U}'_A &= \hat{U}_A - \hat{U}_0, \\ \hat{U}'_B &= \hat{U}_B - \hat{U}_0 \\ \hat{U}'_C &= \hat{U}_C - \hat{U}_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Proudy v jednotlivých fázích spotřebiče (rovnající se linkovým proudům) z Ohmova zákona:

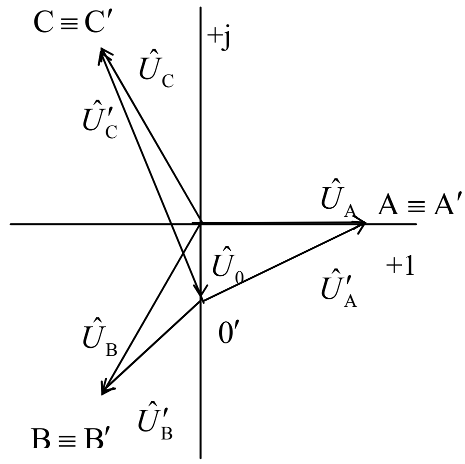
$$\hat{I}_A = \hat{Y}_A \hat{U}'_A, \quad \hat{I}_B = \hat{Y}_B \hat{U}'_B, \quad \hat{I}_C = \hat{Y}_C \hat{U}'_C \tag{22}$$

Proud středním vodičem je podle vztahu:

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C \quad \text{nebo také} \quad \hat{I}_0 = \hat{Y}_0 \hat{U}_0 \tag{23}$$



Obr. 13 *Překreslené schéma z obr. 12*



Obr. 14 *Fázorový diagram napětí obvodu z obr. 13*

Příslušný fázorový diagram (2. druhu) je na *obr. 14*. Vidíme, že následkem nesymetrie spotřebiče vznikne mezi nulovým bodem generátoru 0 a nulovým bodem spotřebiče 0′ napětí $\hat{U}_0$, které působí, že fázové napětí spotřebiče už netvoří souměrnou soustavu. Napětí na jedné (nebo na dvou) fázích spotřebiče se vůči napětí zdroje zvětší a na zbývajících dvou (nebo jedné) se zmenší. Tento jev je nežádoucí, neboť obyčejně chceme, aby všechny fáze spotřebiče byly na stejném napětí. Proto se snažíme, aby trojfázová síť byla pokud možno rovnoměrně zatížena.

b) Zdroj souměrný, zátěž souměrná

Schéma zapojení je stejné jako v předešlém případě *obr. 13*, takže můžeme použít pro výpočet $\hat{U}_0$ vztah (20), do kterého dosadíme podmínku symetrie $\hat{Y}_A = \hat{Y}_B = \hat{Y}_C = \hat{Y}$. Dostaneme:

$$\hat{U}_0 = \frac{\hat{Y}\hat{U}_A + \hat{Y}\hat{U}_B + \hat{Y}\hat{U}_C}{\hat{Y}_A + \hat{Y}_B + \hat{Y}_C + \hat{Y}_0} = \frac{\hat{Y}\left(\hat{U}_A + \hat{U}_B + \hat{U}_C\right)}{\hat{Y}_A + \hat{Y}_B + \hat{Y}_C + \hat{Y}_0} = 0 \tag{24}$$

Protože součet fázových napětí souměrné soustavy je podle (14) nulový. Vidíme, že při souměrnosti zdroje i spotřebiče je napětí mezi nulou zdroje a nulou spotřebiče nulové. Důsledkem toho i fázové napětí spotřebiče a zdroje jsou stejné (při zanedbání impedance vodičů).

$$\hat{U}'_A = \hat{U}_A, \quad \hat{U}'_B = \hat{U}_B, \quad \hat{U}'_C = \hat{U}_C \tag{25}$$

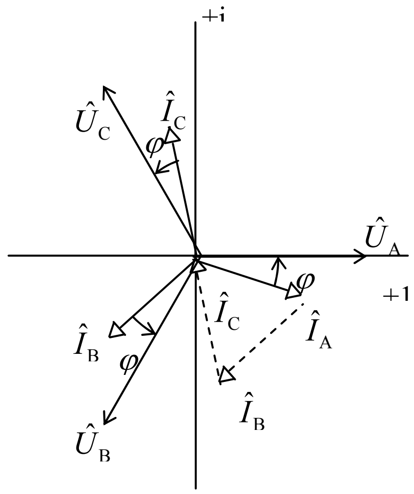
Proudy můžeme vypočítat přímo z fázových napětí zdroje pomocí Ohmova zákona:

$$\hat{I}_A = \frac{\hat{U}_A}{\hat{Z}}, \quad \hat{I}_B = \frac{\hat{U}_B}{\hat{Z}}, \quad \hat{I}_C = \frac{\hat{U}_C}{\hat{Z}} \tag{26}$$

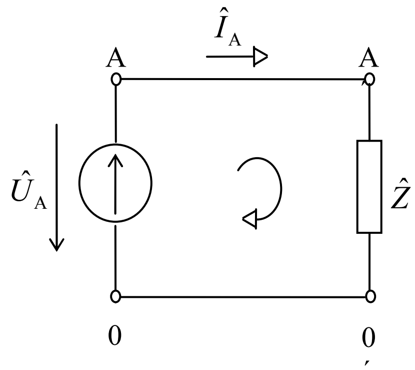
Protože ve vztazích (26) je každé fázové napětí poděleno tou samou impedancí $\hat{Z} = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, jsou proudy co do velikosti stejné a posunuté o stejný úhel vůči napětí své fáze. Z toho vyplývá, že i proudy tvoří souměrnou soustavu (*obr. 16*). Jejich fázorový součet se rovná nule (na *obr. 15* čárkovaně):

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_A + \hat{I}_B + \hat{I}_C = 0 \tag{27}$$

Tj. středním vodičem neteče žádný proud. Proto u obvodů se souměrným zdrojem a souměrnou zátěží můžeme střední vodič vynechat. Přesto se však obvykle střední vodič přece jen vyvede a to pro případ porušení symetrie spotřebiče.



***Obr. 15** Fázorový diagram souměrného spotřebiče zapojeného do Y napájeného souměrným zdrojem zapojeným do Y*



***Obr. 16** Jednofázové náhradní schéma souměr. spotřebiče zapojeného do Y, napájeného ze souměrného zdroje zapojeného do Y*

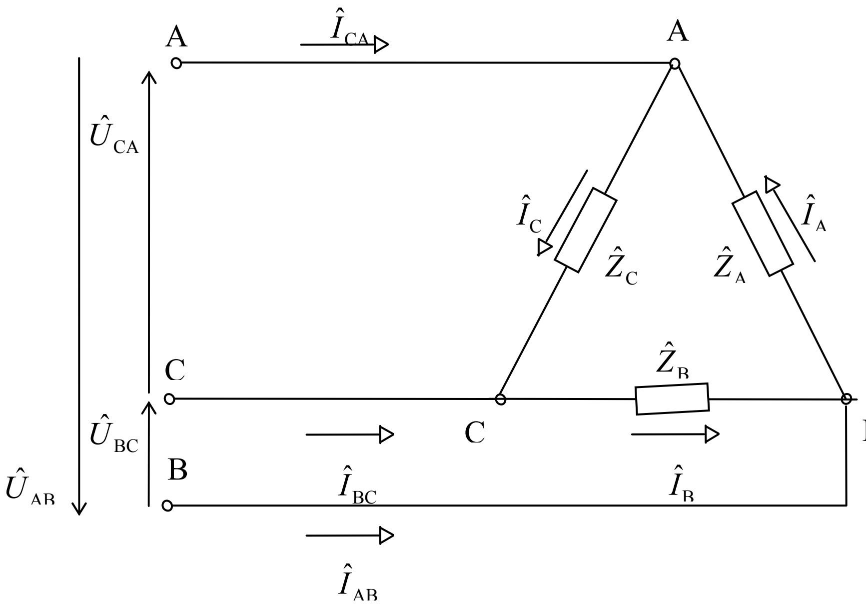
Z uvedeného vyplývá také, že trojfázový obvod se souměrným napájením a souměrnou zátěží můžeme řešit jako jednofázový obvod podle schématu *obr. 16*. Stačí vypočíst jen proud v jedné fázi podle vztahu $\hat{I} = \hat{U} / \hat{Z}$ a proudy v ostatních fázích mají stejnou velikost a jsou vůči proudu v první fázi otočené o -120° a +120°.

❑ Zátěž zapojená do trojúhelníka (impedance vedení je zanedbatelná)

Fázové proudy spotřebiče můžeme vypočítat velmi jednoduše bezprostřední aplikací Ohmova zákona. Jak vidíme z *obr. 17*, jsou impedance zátěže $\hat{Z}_A$, $\hat{Z}_B$, $\hat{Z}_C$ připojeny bezprostředně na linková napětí $\hat{U}_{AB}$, $\hat{U}_{BC}$, $\hat{U}_{CA}$ takže platí:

$$\hat{I}_A = \frac{\hat{U}_{AB}}{\hat{Z}_A}, \quad \hat{I}_B = \frac{\hat{U}_{BC}}{\hat{Z}_B}, \quad \hat{I}_C = \frac{\hat{U}_{CA}}{\hat{Z}_C} \tag{28}$$

Linkové proudy můžeme potom vypočíst ze vztahů (15). Vztahy (15) a (28) platí bez ohledu na to, zda jsou napětí zdroje nebo spotřebiče souměrná nebo nesouměrná. Pro souměrný spotřebič napájený souměrným generátorem však vyplývá, že i soustava fázových a také linkových proudů bude souměrná, takže stačí řešit jen pro jednu fázi.

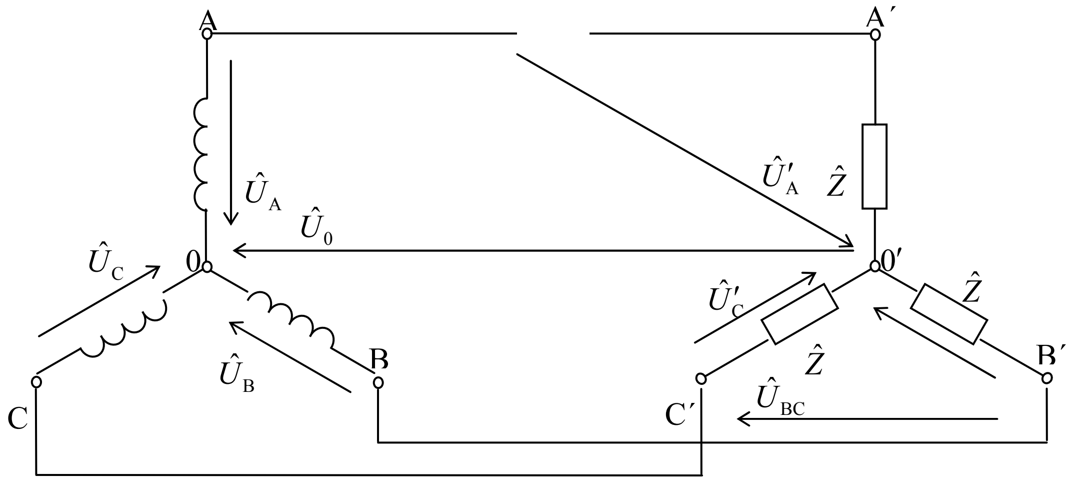


Obr. 17 *Zátěž zapojená do D, impedance vedení zanedbaná*

❑ Jednoduché poruchové stavy v trojfázovém obvodě

V trojfázových obvodech mohou vzniknout různé druhy poruchových stavů. Pro ilustraci probereme dva velmi časté poruchové stavy, které nastanou, když na souměrný zdroj je připojený spotřebič do hvězdy, který byl původně souměrný, avšak následkem přerušení nebo zkratování jedné jeho fáze se stal nesouměrným. Vzniklá nesymetrie fázových napětí na zátěži je největší, když je vedení trojvodičové, tj. bez středního vodiče. Proto budeme zkoumat právě tento případ.

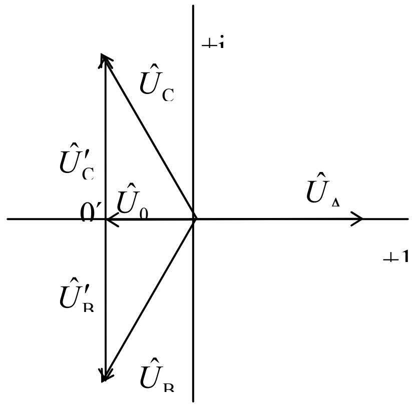
a) Přerušení jedné fáze spotřebiče



Obr. 18 *Přerušení jedné fáze*

Následkem poruchy je přerušený přívod k jedné fázi (např. k fázi A) zátěže - *obr. 18*, tj. $\hat{Z}_{\mathrm{A}} = \infty$ resp. $\hat{Y}_{\mathrm{A}} = 0$. Protože byla zátěž původně souměrná, platí $\hat{Y}_{\mathrm{B}} = \hat{Y}_{\mathrm{C}} = \hat{Y}$. Dosaďme tyto podmínky do výrazu (20), protože se jedná o specielní případ obvodu, souměrný zdroj, zátěž nesouměrná.

Pro souměrnou soustavu fázových napětí zdroje platí $\hat{U}_{\mathrm{A}} + \hat{U}_{\mathrm{B}} + \hat{U}_{\mathrm{C}} = 0$ a při izolovaném uzlu $\hat{Y}_0 = 0$.



***Obr. 19** Fázorový diagram napětí obvodu při přerušení jedné fáze*

Fázová napětí na spotřebiči jsou podle (21):

$$\hat{U}'_{\mathrm{B}} = \hat{U}_{\mathrm{B}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{B}} + \frac{\hat{U}_{\mathrm{A}}}{2} = \frac{1}{2}\hat{U}_{\mathrm{BC}},$$

$$\hat{U}'_{\mathrm{C}} = \hat{U}_{\mathrm{C}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{C}} + \frac{\hat{U}_{\mathrm{A}}}{2} = -\frac{1}{2}\hat{U}_{\mathrm{BC}}$$

jak je vidět z obr. 20, jejich absolutní hodnoty jsou:

$$\hat{U}'_{\mathrm{B}} = \hat{U}'_{\mathrm{C}} = \hat{U}'_{\mathrm{f}} = \sqrt{3}\,\frac{\hat{U}_{\mathrm{f}}}{2} = 0{,}866\,\hat{U}_{\mathrm{f}}$$

Při přerušení jedné fáze, klesne napětí na ostatních dvou fázích spotřebiče na 86,6 % původní hodnoty. Napětí na přerušené fázi spotřebiče je zřejmě nulové. Napětí

$$\hat{U}'_{\mathrm{A}} = \hat{U}_{\mathrm{A}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{A}} + \frac{\hat{U}_{\mathrm{A}}}{2} = 1{,}5\,\hat{U}_{\mathrm{A}}$$

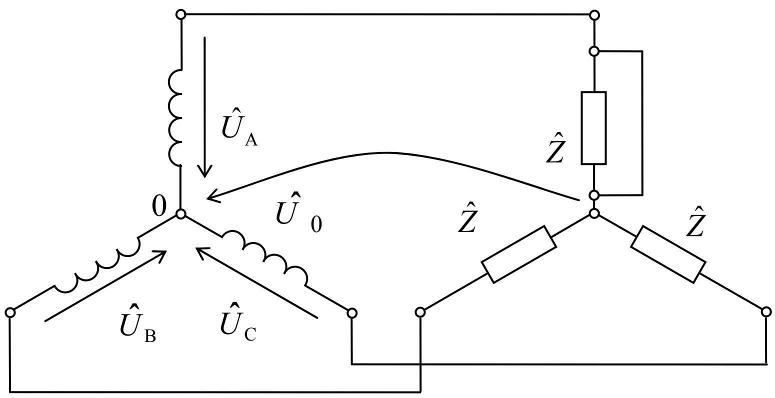
není na fázi A spotřebiče, ale mezi body A a 0′.

b) Zkratování jedné fáze spotřebiče

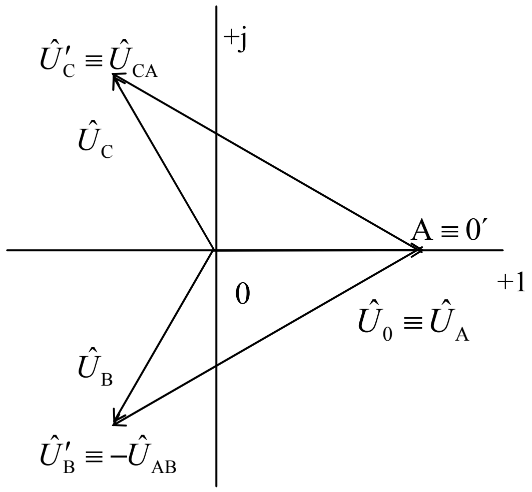
Při zkratování jedné fáze spotřebiče, např. A, můžeme ze schématu na *obr. 20* přímo zjistit, že napětí $\hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{A}}$ a teda $\hat{U}'_{\mathrm{A}} = \hat{U}_{\mathrm{A}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{A}} - \hat{U}_{\mathrm{A}} = 0$. Napětí na ostatních dvou fázích spotřebiče jsou:

$$\hat{U}'_{\mathrm{B}} = \hat{U}_{\mathrm{B}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{B}} - \hat{U}_{\mathrm{A}} = \hat{U}_{\mathrm{BA}} = -\hat{U}_{\mathrm{AB}}; \quad \hat{U}'_{\mathrm{C}} = \hat{U}_{\mathrm{C}} - \hat{U}_0 = \hat{U}_{\mathrm{C}} - \hat{U}_{\mathrm{A}} = \hat{U}_{\mathrm{CA}}$$

a jsou totožné se sdruženými napětími zdroje, jak vidíme



***Obr. 20** Zkrat jedné fáze*



Obr. 21 *Fázorový diagram napětí při zkratu jedné fáze*

také přímo ze schématu *obr. 20* nebo z fázorového diagramu *obr. 21*. Jejich absolutní hodnota je

$$\hat{U}'_{B} = \hat{U}'_{C} = \hat{U}'_{f} = \sqrt{3}U_{f} = 1{,}73\,U_{f} = U_{s}$$

Při zkratování jedné fáze spotřebiče se zvýší napětí na ostatních dvou fázích o 73 %. To může vést k dalším poruchám, např. když by se jednalo o žárovky, zmenšila by se podstatně jejich životnost.

1.4 Výkony v trojfázových symetrických soustavách

Spojení fází do hvězdy

Při tomto spojení platí vztahy mezi velikostmi fázových a sdružených (síťových) napětí a proudů:

$$U_s = \sqrt{3}\,.U_f\,; \quad I_s = I_f; \tag{29}$$

Zdánlivý výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:

$$S_{1f} = U_f\,.\,I_f\ (V.A);\ \ S_{3f} = 3\,.\,S_{1f} = 3\,.\,U_f\,.\,I_f = \sqrt{3}\,.U_s\,.\,I_s\ (V.A) \tag{30}$$

Činný výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:

$$P_{1f} = S_{1f}\,.\,\cos\varphi = U_f\,.\,I_f\,.\,\cos\varphi\ (W);$$

$$P_{3f} = 3\,.\,P_{1f} = 3\,.\,U_f\,.\,I_f\,.\,\cos\varphi = \sqrt{3}\,.U_s\,.\,I_s\,.\,\cos\varphi\ (W) \tag{31}$$

Jalový výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:

$$Q_{1f} = S_{1f}\,.\,\sin\varphi = U_f\,.\,I_f\,.\,\sin\varphi\ (var),$$

$$Q_{3f} = 3\,.\,Q_{1f} = 3\,.\,U_f\,.\,I_f\,.\,\sin\varphi = \sqrt{3}\,.U_s\,.\,I_s\,.\,\sin\varphi\ (var) \tag{32}$$

Spojení fází do trojúhelníka

Při spojení do trojúhelníka platí vztahy mezi velikostmi fázových a sdružených (síťových) napětí a proudů:

$$U_s = U_f\,; \quad I_s = \sqrt{3}\ .\ I_f; \tag{33}$$

Zdánlivý výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:

$$S_{1f} = U_f \,.\, I_f \text{ (V.A)};\ S_{3f} = 3 \,.\, S_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \text{ (V.A)} \qquad (34)$$

Činný výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:

$$P_{1f} = S_{1f} \,.\, \cos\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi \text{ (W)};$$

$$P_{3f} = 3 \,.\, P_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \cos\varphi \text{ (W)} \qquad (35)$$

Jalový výkon jedné fáze a celé soustavy (3-fázový) vypočteme:$Q_{1f} = S_{1f} \,.\, \sin\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi$ (var),

$$Q_{3f} = 3 \,.\, Q_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \sin\varphi \text{ (var)} \qquad (36)$$

I když formálně jsou vztahy pro výpočet stejné při zapojení do hvězdy i do trojúhelníka, je zřejmé, že při spojení shodných impedancí do trojúhelníka a do hvězdy v jedné soustavě, je odebíraný výkon zátěže spojené do trojúhelníka větší.

Při nesouměrné soustavě musíme vypočítat výkony v jednotlivých fázích zvlášť. Třífázový (celkový) výkon potom dostaneme jejich součtem.

Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů. Skriptum ČVUT Praha1999; článek 7.11

Studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 11

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Vysvětlete princip 3-fázového generátoru!

2. Jaký je fázový posun mezi fázory napětí fáze A a fáze B?

3. Co musí splňovat souměrná soustava?

4. Aplikujte větu o paralelních generátorech na řešení 3-fázových obvodů!

Odpovědi naleznete ve výkladu, odst. 1.1 (1.otázka), obr. 1.3 (2.otázka), odst.1.1 (3.otázka), odst.1.3.1 (4.otázka).

Úlohy k řešení

1. (2 body) Napište vztahy mezi fázovými a síťovými napětími a fázovými a síťovými proudy u symetrické soustavy zapojené do hvězdy. Dále napište vztahy pro výpočet zdánlivého, činného a jalového výkonu jednofázového i trojfázového.

2. (2 body) Napište vztahy mezi fázovými a síťovými napětími a fázovými a síťovými proudy u symetrické soustavy zapojené do trojúhelníka. Dále napište vztahy pro výpočet zdánlivého, činného a jalového výkonu jednofázového i trojfázového.

3. (6 bodů) Vyšetřete napětí, proudy a činný výkon v trojfázovém obvodu v poruchovém stavu -obr.20 (dokonalý zkrat mezi svorkami Z_A = 0). Nakreslete fázorový diagram napěťových a proudových poměrů.

$U_A = U_B = U_C = 400/\sqrt{3}$ V, $\hat{Z} = R = 10\ \Omega$

Klíč k řešení

1. $U_s = \sqrt{3}\,.U_f$; $I_s =.I_f$;

$S_{1f} = U_f \,.\, I_f$ (V.A);

$S_{3f} = 3 \,.\, S_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s$ (V.A)

$P_{1f} = S_{1f} \,.\, \cos\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi$ (W);

$P_{3f} = 3 \,.\, P_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \cos\varphi$ (W)

$Q_{1f} = S_{1f} \,.\, \sin\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi$ (var)

$Q_{3f} = 3 \,.\, Q_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \sin\varphi$ (var)

2. $U_s = U_f$; $I_s = \sqrt{3}\,.\, I_f$;

$S_{1f} = U_f \,.\, I_f$ (V.A);

$S_{3f} = 3 \,.\, S_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s$ (V.A)

$P_{1f} = S_{1f} \,.\, \cos\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi$ (W);

$P_{3f} = 3 \,.\, P_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \cos\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \cos\varphi$ (W)

$Q_{1f} = S_{1f} \,.\, \sin\varphi = U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi$ (var)

$Q_{3f} = 3 \,.\, Q_{1f} = 3 \,.\, U_f \,.\, I_f \,.\, \sin\varphi = \sqrt{3}\,.U_s \,.\, I_s \,.\, \sin\varphi$ (var)

3. $\hat{U}_A = 230{,}94$ V $= 230{,}94.\, e^{j0^\circ}$ V

$\hat{U}_B = (-115{,}47 - j\,200)$ V $= 230{,}94.\, e^{-j120^\circ}$ V

$\hat{U}_C = (-115{,}47 + j\,200)$ V $= 230{,}94.\, e^{+j120^\circ}$ V

$\hat{U}_0 = 230{,}94.\, e^{j0^\circ}$ V

$\hat{Z} = 10 \,.e^{j0^\circ}\ \Omega$

$\hat{U}_1 = 0$ V

$\hat{U}_2 = (-346{,}41 - j\,200)$ V $= 400.\, e^{-j150^\circ}$ V

$\hat{U}_3 = (-346{,}41 + j\,200)\ \text{V} = 400.\,e^{+j150^\circ}\ \text{V}$

$\hat{I}_1 = (69{,}282 + j\,0)\ \text{A} = 69{,}282.\,e^{-j0^\circ}\ \text{A}$

$\hat{I}_2 = (-34{,}641 - j\,20)\ \text{A} = 40.\,e^{-j150^\circ}\ \text{A}$

$\hat{I}_3 = (-34{,}641 + j\,20)\ \text{A} = 40.\,e^{+j150^\circ}\ \text{A}$

$P_{3f} = U_1\,.\,I_1\,cos\varphi_1 + U_2\,.\,I_2\,cos\varphi_2 + U_3\,.\,I_3\,cos\varphi_3 = 0 + 400\,.\,40\,cos\,0^\circ + 400\,.\,40\,cos\,0^\circ = 32\,000\ \text{W}$

Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **5** bodů, je možno přejít ke studiu jiných témat. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.

Zadání samostatné práce č. 1:

1. Napište podmínku pro:

a) vyváženost trojfázového zdroje napětí,

b) souměrnost trojfázového zdroje napětí,

c) symetrii trojfázové zátěže,

d) optimální provoz trojfázového obvodu tvořeného trojfázovým zdrojem a trojfázovou zátěži

a graficky ji zobrazte.

Hodnocení za zpracování: 0 nebo 1 bod.

2. Vyřešte podle vašeho rozhodnutí právě jednu z variant zadání:

1.Varianta: souměrný trojfázový zdroj zapojený do hvězdy, k němuž je připojena symetrická trojfázová zátěž zapojená

a) do hvězdy,

b) do trojúhelníka.

Hodnocení za vyřešení: 0 nebo 1 bod, hodnocení za posudek 0 nebo 1 bod.

2. Varianta: souměrný trojfázový zdroj zapojený do hvězdy, k němuž je připojena nesymetrická trojfázová zátěž zapojená do hvězdy

a) třemi fázovými vodiči,

b) třemi fázovými vodiči a nulovým vodičem.

Hodnocení za vyřešení: 0 až 2 body, hodnocení za posudek 0 až 2 body.

3. Varianta: souměrný trojfázový zdroj zapojený do hvězdy, k němuž je připojena libovolná trojfázová zátěž zapojená do hvězdy se záměnou nulového vodiče s libovolným fázovým vodičem

a) ke středu zdroje je připojen fázový vodič,

b) ke středu zdroje není připojen žádný vodič.

Hodnocení za vyřešení: 0 až 3 body, hodnocení za posudek 0 až 2 body.

Hodnocení za odevzdání projektu: do konce 5. týdne výuky 1 bod, jinak 0 bodů

Hodnocení za prezentaci projektu na výpočetním cvičení do konce 8. týdne 0 až 3 body, jinak bezpodmínečně 0 bodů.

V kombinované formě studia není prezentace vyžadována, když student kombinovaného studia odevzdá projekt do konce 5. týdne semestru obdrží 4 body, jinak 0 bodů.

Řešení obsahuje:

- výpočet komplexních hodnot všech obvodových veličin a všech výkonů zátěže i zdroje,
- zobrazení fázorových digramů napětí a proudů,
- zobrazení okamžitých hodnot napětí, proudů a výkonů.

Posudek obsahuje:

Vlastní odborný názor na hodnoty obvodových veličin a výkonů řešené varianty zapojení obvodu.

K řešení použijte virtuální laboratoř!

2. Přechodné jevy

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování textu této studijní podpory budete umět:

- definovat příčiny vzniku přechodného děje a stanovit počáteční podmínky.
- určit řád obvodu (z hlediska přechodného děje).
- sestavit obvodové rovnice v časové oblasti.
- řešit přechodné děje v obvodech 1. a 2. řádu.
- posoudit význam časové konstanty obvodu (z hlediska ustálení stavu obvodu).

Výklad

2.1 Úvod

Až dosud jsme řešili elektrické obvody v ustáleném stavu. Všechny elektrické veličiny byly **stacionární** (v čase) nebo se **měnily harmonicky**. Předpokládalo se, že daný stav trvá velmi dlouho. Skutečnost je však jiná. - "před konečnou dobou" existoval vždy jiný stav obvodu - například vůbec nebyly připojeny zdroje. Ukáže se, že obvod ***nemůže přejít*** z jednoho ustáleného stavu do jiného ustáleného stavu *v* ***nekonečně krátké době***. Mezi dvěma ustálenými stavy je vždy PŘECHODNÝ DĚJ.

❑ Kdy vzniká přechodný děj ?

1. Při připojování zdrojů.
2. Při odpojování zdrojů.
3. Při připojování nebo odpojování obvodových prvků během funkce obvodu.
4. Při změnách parametrů obvodových prvků (R, L, C, zdrojů).
5. Při buzení obvodů neperiodickými signály.

❑ Proč vzniká přechodný děj

V praxi neexistuje "čistě" odporový obvod. Pokud tomu tak zdánlivě je, musíme uvažovat parazitní kapacity a indukčnosti odporníků. Pokud je v obvodu funkční kapacita (modelovaná kapacitorem) nebo indukčnost (modelovaná induktorem), lze často parazitní kapacity a indukčnosti zanedbat.

Každá změna stavu obvodu vyvolá i změnu energie v kapacitorech a induktorech (ať už funkčních nebo parazitních).

Energie akumulovaná v kapacitoru je $W_C = Cu^2/2$ a platí $i = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$. Je zřejmé, že ***napětí*** u na kapacitoru ***jednoznačně definuje energetický stav kapacitoru*** - je to **stavová veličina kapacitoru**. Tato ***stavová veličina se nemůže měnit nekonečně rychle*** (skokem, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t \to \infty$), protože tomu by odpovídal i nekonečně velký proud i (a tedy i okamžitý výkon $p = ui$) - a to není fyzikálně možné (proud kapacitorem není stavová veličina).

Energie akumulovaná v induktoru je $W_L = Li^2/2$, dále platí $u = L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. ***Proud*** i induktorem ***jednoznačně definuje energetický stav induktoru*** - je to **stavová veličina induktoru**. Tato stavová veličina se nemůže měnit skokově, protože by to vedlo k nekonečně velké hodnotě napětí. a to není fyzikálně možné (napětí na induktoru není stavová veličina).

PŘI JAKÉKOLIVZMĚNĚ VE STAVU OBVODU SI PROUD INDUKČNOSTÍ i_L A NAPĚTÍ NA KAPACITORU u_C ZACHOVAJÍ (PO NEKONEČNĚ KRÁTKOU DOBU) SVOU HODNOTU. BEZPROSTĚDNĚ PO ZMĚNĚ (čas 0_+) MAJÍ STEJNOU HODNOTU JAKO BEZPROSTŘEDNĚ PŘED ZMĚNOU (čas 0-; ČAS 0 ODPOVÍDÁ OKAMŽIKU ZMĚNY STAVU).

Tvrzení v rámečku lze zapsat (modelovat) vztahy

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) \quad (1) \qquad\qquad u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) \quad (2)$$

které popisují tzv. **fyzikální** (stavové, energetické) **počáteční podmínky**.

Právě spojitá změna stavových veličin vede k tomu, že přechod mezi dvěma ustálenými stavy je spojitý, má konečnou dobu trvání (nikdy nulovou) - že vzniká přechodný děj.

Pokud určíme v obvodu i ostatní proudy (mimo proudů induktory) a napětí (mimo napětí na kapacitorech) v čase $t = 0_+$ a $t = 0_-$, hovoříme o **matematických počátečních podmínkách**. Lze je určit ("dopočítat") z fyzikálních počátečních podmínek aplikací Kirchhoffových zákonů a Ohmova zákona.

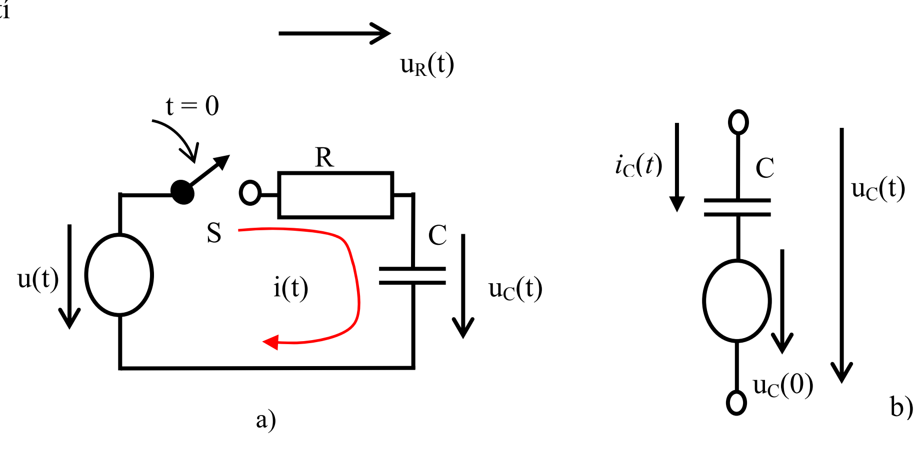
2.2 Řešení obvodů 1. řádu

Obvod 1. řádu obsahuje rezistory a jeden kapacitor. Nebo obsahuje rezistory a jeden induktor. Východiskem pro řešení jsou vždy Kirchhoffovy zákony a matematické modely prvků pro obecné (časově proměnné) veličiny.

❑ Obvody RC

Základní schéma (model) obvodu RC při připojení zdroje napětí $u(t)$ v čase $t = 0$ je na *obr.1*.

Nejdříve prošetřeme situaci před sepnutím spínače S (čas $t = 0_-$). Kapacitor C může být obecně nabit na napětí



***Obr. 1** a) Připojení zdroje napětí u(t) k obvodu RC; b) ekvivalentní schéma kapacitoru pro $u_C(0)$ různé od nuly.*

$u_C(0_-)$ [musíme znát celou "historii" děje nebo napětí změřit].

Po sepnutí spínače S jistě platí (2. Kirchhoffův zákon), že

$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$

tedy (Ohmův zákon)

$u(t) = R\, i_R(t) + u_C(t)$.

Platí ovšem (sériové řazení), že $i(t) = i_R(t) = i_C(t) = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ a tedy také

$$u(t) = R\, C\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t + u_C(t) \qquad (3)$$

Tím jsme obdrželi matematický popis (model) pro připojení zdroje napětí v čase "0" k obvodu RC - podle obr.1a.

Řešení diferenciálních rovnic 1. a 2. řádu je podrobně popisováno v článku 18.6. Vztah (3) je nehomogenní diferenciální rovnice 1. řádu (obsahuje pouze derivaci 1. řádu) s konstantními koeficienty. Vztah (3) můžeme formálně upravit do podoby

$$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t + u_C(t)/(RC) = u(t)/(RC) \qquad (4)$$

potom (vzhledem k čl.18.6) platí, že: $y \equiv u_C(t)$, $g(x) \equiv u(t)/(RC)$, $a = 1/(RC)$. ***Vždy hledáme nejdříve řešení homogenní rovnice***- příslušné ke vztahu (4) - rovnice (4) bez "pravé" strany:

$$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t + u_C(t)/(RC) = 0 \qquad (5)$$

ve tvaru (index h pro řešení homogenní rovnice)

$$u_{Ch}(t) = K \cdot e^{\lambda t} \qquad (6)$$

Po derivaci vztahu (6) a dosazení do vztahu (4) snadno určíme, že vztah (6) je vždy řešením pro

$$\lambda = -a = -1/(RC) = -1/\tau \qquad (7)$$

kde

$$\tau = RC \qquad (8)$$

je **časová konstanta obvodu RC**, její význam bude objasněn dále.

Dále musíme určit nějaké **partikulární řešení** rovnice (4). **Výsledné řešení** je superpozicí řešení homogenní rovnice a řešení partikulárního.

a) Stejnosměrný zdroj napětí $u(t) = U_0$

Předpokládejme, že $u(t) = U_0$. Potom partikulární (dílčí) řešení zjistíme snadno pro ustálený stav v čase $t \to \infty$. ***Pro stejnosměrné poměry nahradíme kapacitor C v ustáleném stavu rozpojeným obvodem***, proto při dané jednoduché konfiguraci obvodu platí (index p pro partikulární řešení)

$$y_p(t) \equiv u_{Cp}(t \to \infty) = u_C(\infty) = U_0 \qquad (9)$$

protože rezistorem R již neprotéká žádný proud, na kapacitoru je "celé" napětí zdroje.

Výsledné řešení má tedy tvar

$$u_C(t) = K \cdot e^{-t/\tau} + u_C(\infty) \qquad (10)$$

Řešení obsahuje neznámou konstantu K, kterou ovšem můžeme určit ze známého stavu v čase $t = 0$: $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0)$, tedy platí $u_C(0) = K \cdot e^{-0} + u_C(\infty) = K + u_C(\infty)$. Odsud snadno určíme, že $K = u_C(0) - u_C(\infty)$ a v daném případě platí

$$\boxed{u_C(t) = [u_C(0) - u_C(\infty)] \cdot e^{-t/\tau} + u_C(\infty)} \qquad (11)$$

kde

$\tau = RC$.

Tento vztah je možné v obvodech RC 1. řádu používat zcela obecně, umíme-li určit počáteční podmínku $u_C(0)$ a partikulární řešení $u_C(\infty)$.

Příklad 1.

Přesvědčte se, že řešení $u_{Cp}(t \to \infty) = u_C(\infty) = U_0$ *vyhovuje rovnici (3) při* $u(t) = U_0$.

Řešení:

Dosadíme přímo do rovnice (3); derivace konstanty U_0 je rovna nule:

$U_0 = R\,C\,\mathrm{d}U_0/\mathrm{d}t + U_0 = U_0$.

Rovnost je splněna, opravdu se jedná o partikulární řešení diferenciální rovnice.

■

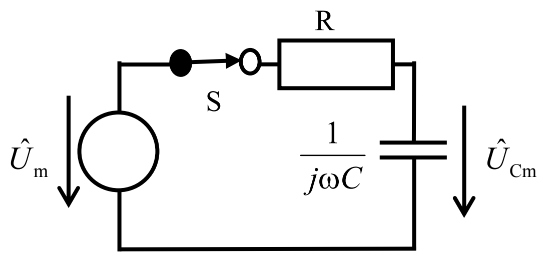
b) Harmonický zdroj napětí

V čase 0 se připojuje zdroj $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U)$

Tomuto zdroji $u(t)$ odpovídá model - viz vztah (3):

$$\mathrm{RC}\,\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t + u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_U) \qquad (12)$$

Řešení homogenní rovnice je opět definováno vztahem (6). Ustálené partikulární řešení zjistíme z harmonického řešení obvodu - *obr.2*.



Obr. *2 Řešení obvodu v harmonicky ustáleném stavu - partikulární řešení.*

Snadno určíme, že (fázory amplitud)

$$\hat{U}_{Cm} = \hat{U}_m \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = U_m e^{j\varphi_U} \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{U_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} e^{j(\varphi_U - \varphi_{RC})}$$

kde

$$\mathrm{tg}\varphi_{RC} = \omega CR$$

Kosinovému zdroji odpovídá reálná složka komplexoru, proto je partikulární řešení

$$u_{Cp}(t) = \frac{U_m}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U - \varphi_{RC}) \qquad (13)$$

Celkové řešení proto je

$$u_C(t) = Ke^{-t/\tau} + U_{m\omega} \cdot \cos(\omega t + \varphi_U - \varphi_{RC}) \qquad (14)$$

kde

$$U_{m\omega} = \frac{U_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}$$

Předpokládejme, že $u_C(0) = 0$. Potom musí platit

$$u_C(0) = 0 = Ke^{-0} + U_{m\omega} \cdot \cos(0 + \varphi_U - \varphi_{RC})$$

a odsud

$$K = -U_{m\omega} \cdot \cos(\varphi_U - \varphi_{RC})$$

Přechodný děj pro $u_C(0) = 0$ je tedy popsán (modelován) vztahem

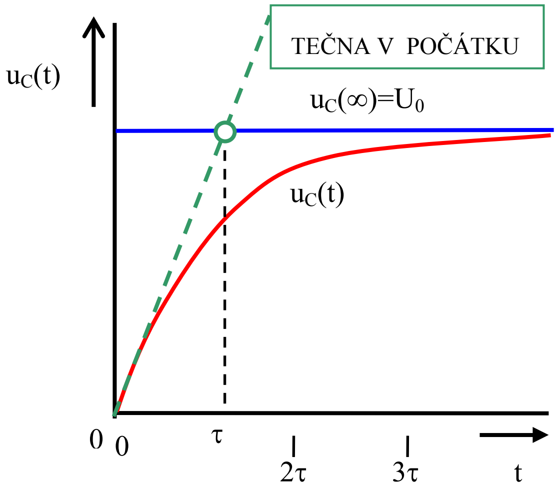
$$u_C(t) = U_{m\omega}\left[\cos(\omega t + \varphi_U - \varphi_{RC}) - e^{-t/\tau}\cos(\varphi_U - \varphi_{RC})\right] \qquad (15)$$

c) Integrační článek RC

O integračním článku hovoříme tehdy, jestliže výstupem obvodu na *obr.1* je napětí na kapacitoru $u_C(t)$, které je pro "stejnosměrné" buzení popsáno vztahem (11). Jestliže platí, že $u_C(0) = 0$, dostáváme

$$u_C(t) = \left[0 - u_C(\infty)\right]\cdot e^{-t/\tau} + u_C(\infty) = u_C(\infty)\left[1 - e^{-t/\tau}\right] = U_0\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \qquad (16)$$

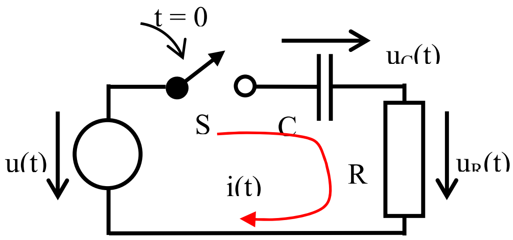
Graficky je tento průběh znázorněn na obr.3. Z grafu je zřejmé, že přechodný děj končí prakticky za dobu asi 3τ, kdy se napětí na kapacitoru přiblíží na 5% k ustálené hodnotě U_0. Z derivace vztahu (16) v počátku bychom mohli určit rovnici tečny v počátku a to, že tato tečna protíná ustálenou úroveň právě v čase $t = \tau$.



***Obr. 3** Průběh napětí na kapacitoru - obr.1- při $u_C(0) = 0$ a $u(t) = U_0$*

d) derivační článek RC

O derivačním článku hovoříme tehdy, jestliže výstupem na *obr. 1* je napětí na rezistoru *R*. Běžně se situace znázorňuje tak, jak je tomu na obr. 4.

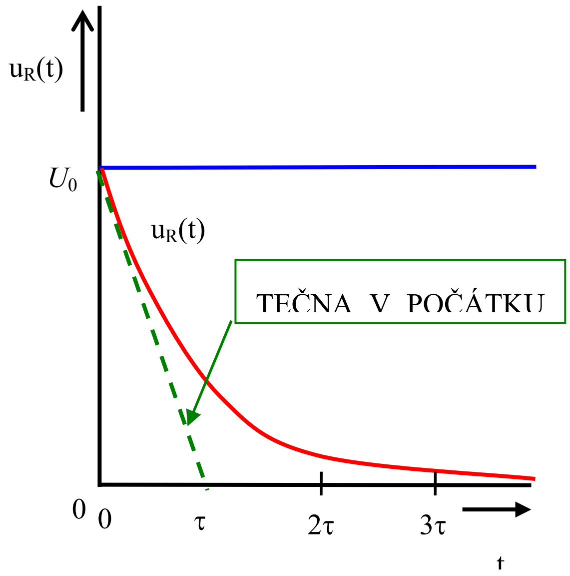


***Obr. 4** Připojení napětí k derivačnímu článku RC*

Snadno zjistíme, že matematický popis je úplně stejný jako u obvodu na obr.1. Proto pro $u(t) = U_0$ a $u_C(0) = 0$ musí opět platit, že $u_C(t) = U_0\left[1 - e^{-t/\tau}\right]$. Potom (2. Kirchhoffův zákon)

$$u_R(t) = U_0 - u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau} \tag{17}$$

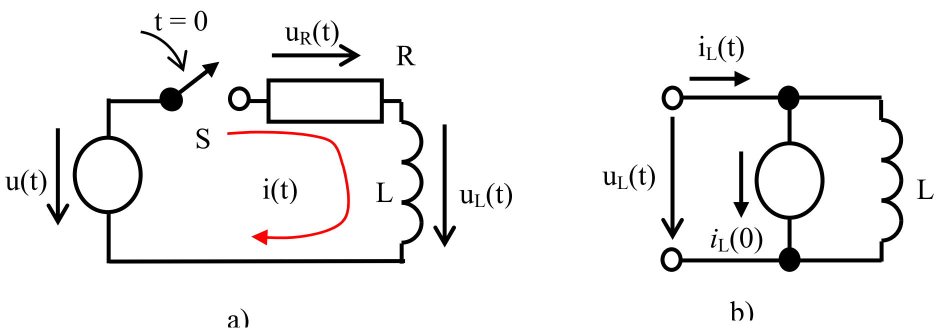
Grafické znázornění napětí na rezistoru je na obr.5.



Obr. 5 *Průběh napětí na rezistoru - obr.1 a 4- při $u_C(0) = 0$ a $u(t) = U_0$*

❑ Obvody RL

Základní model obvodu RL při připojení zdroje napětí $u(t)$ v čase $t = 0$ je na obr. 6.



Obr. 6 *a) Připojení zdroje napětí u(t) k obvodu RL; b) Ekvivalentní schéma induktoru pro nenulovou hodnotu $i_L(0)$*

Prošetříme situaci před sepnutím spínače S (čas t = 0.). Induktorem může obecně protékat nějaký nenulový proud (například v elektronických obvodech přes nějaký další spínač, který zde není nakreslen).

Po sepnutí spínače S musí platit (sériové řazení; $i_L(t) = i_R(t) = i(t)$)

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i_L(t) + L \cdot \mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t \qquad (18)$$

Vztah (18) můžeme formálně upravit do podoby

$$\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t + i_L(t)/(L/R) = u(t)/L \qquad (19)$$

potom (vzhledem k čl. 18.6) platí, že: $y \equiv i_L(t)$, $g(x) \equiv u(t)/L$, $a = 1/(L/R)$. ***Vždy hledáme nejdříve řešení homogenní rovnice*** příslušné ke vztahu (19) - rovnice (19) bez "pravé" strany:

$$\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t + i_L(t)/(L/R) = 0 \qquad (20)$$

ve tvaru (index h pro řešení homogenní rovnice)

$$i_{Lh}(t) = K \cdot e^{\lambda t} \qquad (21)$$

Po derivaci vztahu (21) a dosazení do vztahu (20) snadno určíme, že vztah (21) je vždy řešením pro

$$\lambda = -a = -1/(L/R) = -1/\tau \qquad (22)$$

kde

$$\tau = L/R \qquad (23)$$

je časová konstanta obvodu RL.

a) Stejnosměrný zdroj napětí $u(t) = U_0$

Předpokládejme, že $u(t) = U_0$. Potom partikulární (dílčí) řešení zjistíme snadno pro ustálený stav v čase $t \to \infty$. ***Pro stejnosměrné poměry nahradíme induktor L v ustáleném stavu zkratem***, proto při dané jednoduché konfiguraci obvodu platí (index p pro partikulární řešení)

$$y_p(t) \equiv i_{Lp}(t \to \infty) = i_L(\infty) = U_0/R \qquad (24)$$

Proud v obvodu je omezen pouze rezistorem *R*.

Výsledné řešení má tedy tvar

$$i_L(t) = K \cdot e^{-t/\tau} + i_L(\infty) \qquad (25)$$

Řešení obsahuje jednu neznámou konstantu *K*, kterou určíme ze známého stavu v čase $t = 0$: $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0)$, tedy $i_L(0) = K \cdot e^{-0} + i_L(\infty)$. Snadno určíme, že $K = i_L(0) - i_L(\infty)$

a proto platí

$$\boxed{i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)] \cdot e^{-t/\tau} + i_L(\infty)} \qquad (26)$$

kde

$\tau = L/R$.

Tento vztah je možné v obvodech RL 1. řádu používat zcela obecně, umíme-li určit počáteční podmínku $i_L(0)$ a partikulární řešení $i_L(\infty)$.

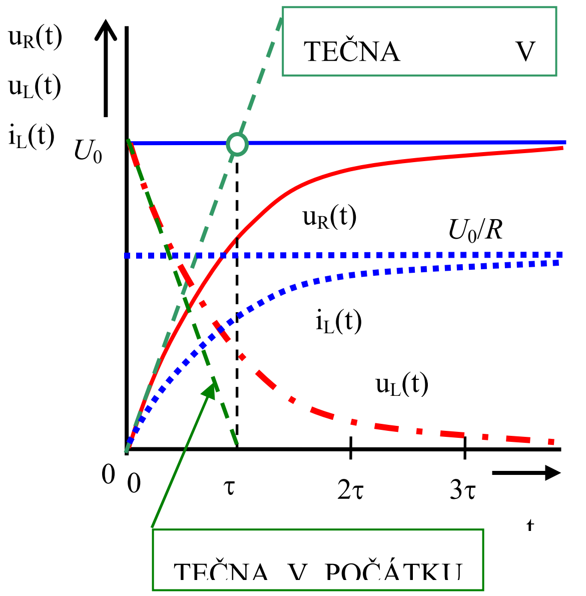
Předpokládáme-li, že $i_L(0) = 0$, potom

$$i_L(t) = i_L(\infty) \cdot \left[1 - e^{-t/\tau}\right] = \frac{U_0}{R} \cdot \left[1 - e^{-t/\tau}\right]$$

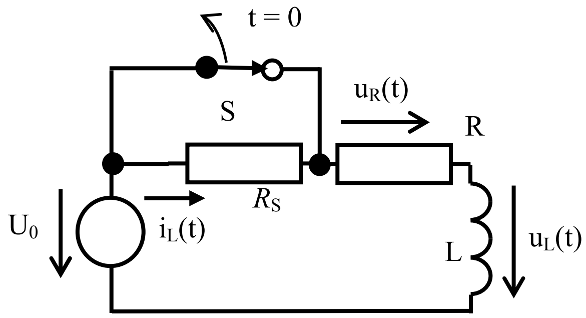
$$u_R(t) = R \cdot i_L(t) = U_0 \cdot \left[1 - e^{-t/\tau}\right] \quad - \quad \text{integr. člen}$$

$$u_L(t) = U_0 - u_R(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad - \quad \text{deriv. člen}$$

Průběhy jsou zobrazeny na obr. 7



***Obr.** 7 Zobrazení časového průběhu veličin v obvodu na obr. 6a*



***Obr. 8** Rozpojení obvodu s induktorem*

b) Rozpojení obvodu s induktorem

Rozpojení obvodu induktoru má v technické praxi často vážné důsledky. Vznikají napěťové impulsy, které mohou vést k destrukci elektrického obvodu. Situace při rozpojení je modelována na obr. 8. Rezistor R_S modeluje odpor spínače S (v rozepnutém stavu), který se zde rozpojuje.

Před rozepnutím spínače platí $i_L(0) = U_0/R$. Po rozpojení spínače S platí v čase $t \to \infty$, že $i_L(\infty) = U_0/(R+R_S)$. Po rozepnutí spínače platí $U_0 = (R+R_S)\cdot i_L(t) + L\cdot \mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t$, tedy i

$$\mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t + i_L(t)/(L/(R+R_S)) = U_0/L\,.$$

Zřejmě platí, že časová konstanta obvodu je $\tau = L/(R+R_S)$. Známým postupem zjistíme pro dané podmínky, že

$$i_L(t) = \left[\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R+R_S}\right]\cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{R+R_S} = \frac{U_0}{R+R_S}\left(\frac{R_S}{R}\cdot e^{-t/\tau} + 1\right) \tag{27}$$

Nyní již můžeme určit časový průběh všech veličin v obvodu. Při rozepnutí spínače S je napětí na rezistoru R_S určeno právě součinem $R_S\ i_L(0) = R_S\ (U_0/R)$. Napětí na induktoru je určeno vztahem $u_L(0) = U_0 - (R+R_S)i_L(0) = -(R_S/R)\cdot U_0$. Pro velké hodnoty rezistoru R_S (ideálně se jedná o nekonečnou hodnotu) tak může dojít ke **zničení spínacího prvku nebo technické cívky.**

c) Harmonický zdroj napětí (obr. 6)

V čase 0 se připojuje zdroj $u(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}})$

Rovnice (19) nyní nabývá podoby

$$\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}/\mathrm{d}t + i_{\mathrm{L}}(t)/(L/R) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}})/L \tag{28}$$

Řešení homogenní rovnice se nemění, je stejné - viz vztah (21). Při harmonickém buzení získáme partikulární řešení snadno metodou harmonické analýzy (v ustáleném stavu). Komplexor proudu je zřejmě $\hat{i}_{\mathrm{L}}(t) = \hat{u}(t)/(R + j\omega L) = U_{\mathrm{m}} e^{j(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}})}/(Z \cdot e^{j\varphi_{\mathrm{RL}}})$, $\mathrm{tg}\varphi_{\mathrm{RL}} = \omega L/R$, $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$. Při sinovém buzení bereme imaginární složku řešení:

$$i_{\mathrm{Lp}}(t) = \mathrm{Im}\left[\hat{i}_{\mathrm{L}}(t)\right] = I_{\mathrm{m}\omega} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}}) \tag{29}$$

kde

$$I_{\mathrm{m}\omega} = U_{\mathrm{m}}/Z \quad .$$

Výsledné řešení má nyní tvar

$$i_{\mathrm{L}}(t) = K \cdot e^{-t/\tau} + I_{\mathrm{m}\omega} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}}) \tag{30}$$

Předpokládáme-li, že platí $i_{\mathrm{L}}(0) = 0$, potom musí platit

$$0 = K \cdot e^{-0} + I_{\mathrm{m}\omega} \sin(0 + \varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}})$$

tedy

$$K = -I_{\mathrm{m}\omega} \sin(\varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}})$$

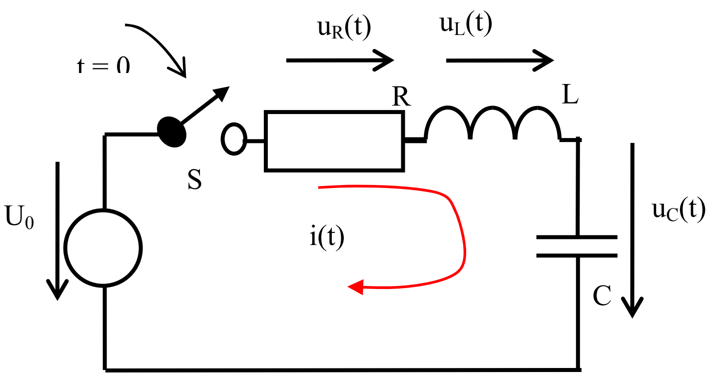
a tudíž

$$i_{\mathrm{L}}(t) = -e^{-t/\tau} \cdot I_{\mathrm{m}\omega} \sin(\varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}}) + I_{\mathrm{m}\omega} \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}}) \tag{31}$$

$$I_{\mathrm{m}\omega} = U_{\mathrm{m}} / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

2.3 Řešení obvodů 2. řádu

V obvodech 1. řádu se vyskytovala kombinace *RL* nebo *RC*, v matematickém modelu se vyskytovala nejvýše derivace 1. řádu. V obvodech 2. řádu se musí vyskytovat více než jeden akumulační prvek, a to tak, že nelze nahradit jediným ekvivalentním prvkem. Typický obvod 2. řádu je na obr. 9. V čase t = 0 je připojen zdroj stejnosměrného napětí U_0.



Obr. 9 *Obvod RLC 2. řádu*

Nejdříve prošetřeme situaci v čase t = 0₋ (1. ustálený stav). Jistě platí, že $i_L(0_-) = 0$, tedy i $u_R(0_-) = 0$. Předpokládejme, že $u_C(0_-) = 0$.

Po sepnutí spínače S musí zůstat zachovány stavové veličiny, tedy

$$i(0_+) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

a

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = 0.$$

V čase $t \to \infty$ (partikulární řešení, 2. ustálený stav) jistě platí $u_C(\infty) = U_0$ (proud je po nabití kapacitoru opět nulový).

I v čase t = 0 musí platit Kirchhoffovy zákony. Proto jistě platí

$$U_0 = R \cdot i_L(0) + L \cdot \mathrm{d}i_L(0)/\mathrm{d}t + u_C(0) \tag{32}$$

Pro dané podmínky snadno zjistíme, že pro první derivaci proudu v čase $t = 0$ platí

$$\mathrm{d}i_L(0)/\mathrm{d}t = U_0 / L \tag{33}$$

Ukáže se, že vztah (33) budeme potřebovat k vyřešení přechodného děje obvodu.

Vztah (32) musí platit obecně v každém časovém okamžiku., proto (platí $i(t) = i_L(t) \equiv i$ a rovněž $u_C(t) \equiv u_C$):

$$R \cdot i + L \cdot \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + u_C = R \cdot i + L \cdot \mathrm{d}i/\mathrm{d}t + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i \cdot \mathrm{d}t = U_0 \tag{34}$$

Obě strany rovnice (34) derivujeme a obdržíme tak diferenciální rovnici 2. řádu ($\mathrm{d}i/\mathrm{d}t \equiv i'$; $\mathrm{d}^2 i/\mathrm{d}t^2 \equiv i''$; derivace konstanty U_0 je rovna nule; integrál se derivací "ruší")

$$R \cdot i' + L \cdot i'' + i/C = 0$$

kterou formálně upravíme do tvaru (jedná se přímo o homogenní rovnici)

$$i'' + (R/L) \cdot i' + i/(LC) = 0 \tag{35}$$

Předpokládejme i nyní řešení ve tvaru $i = K \cdot e^{\lambda t}$. Potom jistě platí pro první derivaci proudu, že $i' = (K \cdot e^{\lambda t})' = K \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot i$; pro druhou derivaci proudu $i'' = (i')' = (\lambda \cdot i)' = \lambda^2 i$. Dosaďme získané výsledky do vztahu (35), označme $R/L = 2\beta$, $1/(LC) = \omega_0^2$ - to je ***rezonanční kmitočet obvodu při harmonickém buzení*** (určený z fázové podmínky rezonance). Dostáváme vztah

$$\lambda^2 \cdot i + 2\beta\lambda \cdot i + \omega_0^2 \cdot i = 0$$

tedy i

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) \cdot i = 0 \tag{36}$$

Triviální řešení $i = 0$ pro nás není zajímavé. Rovnice (36) však může být splněna i tehdy, je-li ***charakteristický polynom*** (viz čl. 18.6) roven nule, tedy

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{37}$$

Řešením kvadratické rovnice (37) získáme dva kořeny

$$\lambda_1 = -(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) \tag{38}$$

$$\lambda_2 = -(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) \tag{39}$$

a řešení homogenní rovnice 2. řádu má v tomto případě tvar (superpozice)

$$i(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \tag{40}$$

Pokud by byla rovnice nehomogenní, museli bychom ještě zjišťovat a přičítat partikulární řešení, obdobně jako tomu bylo u rovnic 1. řádu.

V rovnici (40) máme nyní dvě neznámé konstanty - K_1 a K_2. Potřebujeme tedy znát dva body řešení diferenciální rovnice. 1. podmínka je dána hodnotou proudu $i_L(0) = i(0) = 0$. 2. podmínka je definována vztahem (33), známe totiž derivaci proudu v čase sepnutí (nula). Z 1. podmínky zjistíme, že $0 = K_1 \cdot e^0 + K_2 \cdot e^0$, tedy $K_1 + K_2 = 0$. Pro využití 2. podmínky musíme derivovat vztah (40): $i' = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = |t = 0| = K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2$. Musí tedy platit, že $K_1 \cdot \lambda_1 + K_2 \cdot \lambda_2 = U_0 / L$. Vyšetřením získaného systému dvou rovnic zjistíme, že

$$K_1 = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{U_0}{2L \cdot \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} = -K_2 \tag{41}$$

Nyní již můžeme určit přechodný děj v obvodu na obr. 9:

$$i(t) = \frac{U_0}{2L \cdot \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \cdot \left[e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right] = \frac{I_0}{2} \cdot \left[e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right] \tag{42}$$

kde

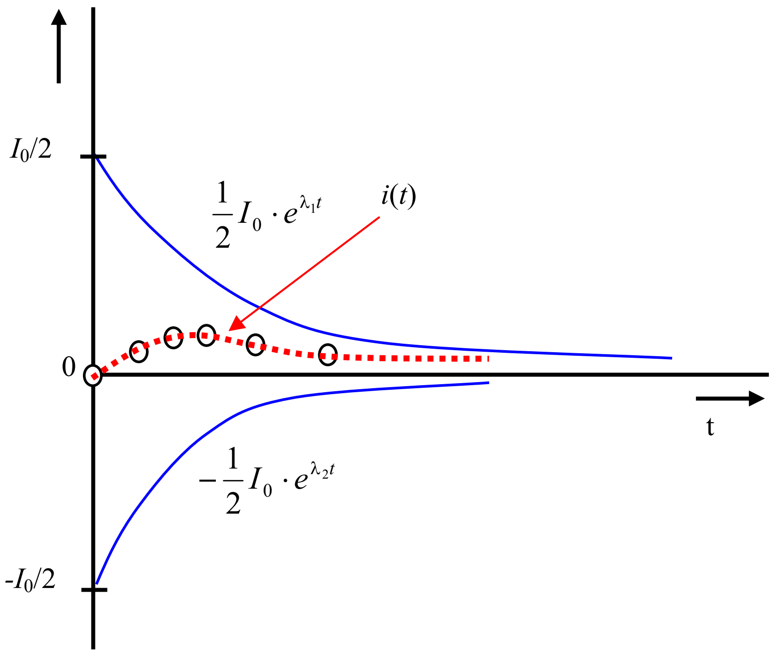
$$I_0 = U_0 / \left(L \cdot \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right).$$

❑ Diskuse vztahu (42)

a) Předpokládejme, že λ_1 *a* λ_2 jsou reálné kořeny

To platí pro $\beta > \omega_0$, tedy pro $R/(2L) > 1/\sqrt{LC}$. Odsud dospějeme k podmínce

$$R > 2 \cdot \sqrt{L/C}$$



Obr. 10 *Aperiodická proudová odezva.*

Je-li tato podmínka splněna, **probíhá přechodný děj aperiodicky - bez zákmitů**. ***Mez aperiodicity*** je definována právě rovností $R = 2 \cdot \sqrt{L/C}$, kdy má řešení jeden reálný dvojnásobný kořen (viz dále).

Zřejmě platí, že absolutní hodnota λ_1 je menší než absolutní hodnota λ_2, exponenciální funkce obsahující λ_2 tedy klesá v čase rychleji - situace je kvalitativně znázorněna na obr. 10.

b) Předpokládejme, že $\beta < \omega_0$, λ_1 *a* λ_2 jsou komplexně sdružené kořeny

Kořeny - vztahy (38) a (39) - upravíme do podoby

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm j\omega_V \tag{43}$$

kde

$$\omega_V = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{44}$$

je ***vlastní kmitočet obvodu***; ($\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{(-1) \cdot (\omega_0^2 - \beta^2)} = j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$).

Ze vztahu (42) potom obdržíme

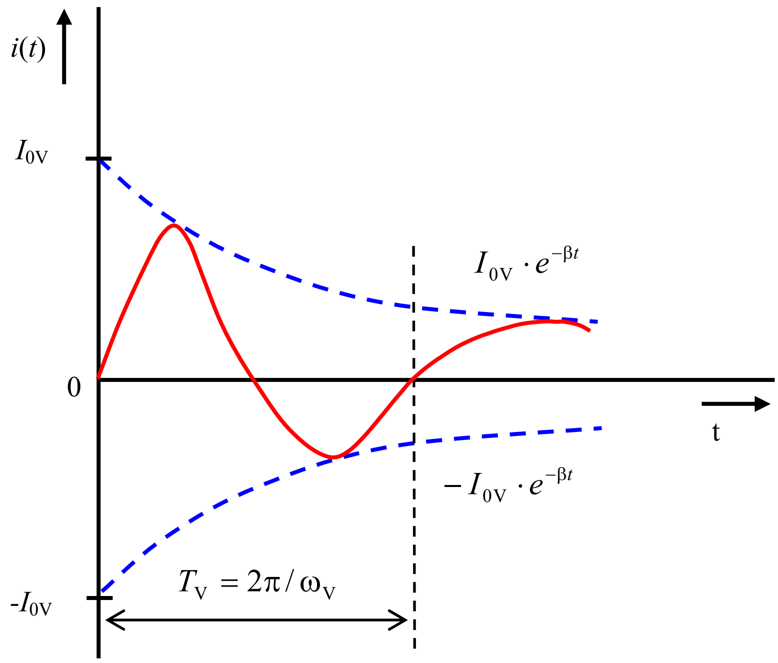
$$i(t) = \frac{U_0}{2L \cdot j \cdot \omega_V} \cdot \left[e^{(-\beta + j\omega_V)t} - e^{(-\beta - j\omega_V)t} \right] = \frac{U_0}{\omega_V L} \cdot e^{-\beta t} \cdot \frac{e^{j\omega_V t} - e^{-j\omega_V t}}{2j} =$$

$$= I_{0V} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin \omega_V t \tag{45}$$

kde

$I_{0V} = U_0/(\omega_V L)$.

Kapacitor C se nabíjí kvaziperiodicky - s **tlumenými kmity o vlastním kmitočtu** ω_V **- periodické nabíjení kapacitoru**. Pro $\beta << \omega_0$ platí $\omega_V \cong \omega_0$. Tlumení kmitů je definováno právě symbolem β - je to **konstanta útlumu** - viz obr. 11.



Obr. 11 *Kvaziperiodická proudová odezva.*

Definuje se rovněž ***dekrement útlumu Δ,*** jako poměr dvou po sobě následujících hodnot proudu vzdálených o periodu vlastního kmitočtu $T_V = 2\pi/\omega_V$. Odsud lze určit, že

$$\Delta = \frac{I_{0V}\cdot e^{-\beta t}\cdot \sin\omega_V t}{I_{0V}\cdot e^{-\beta(t+T_V)}\cdot \sin(\omega_V t + T_V)} = \left|\sin(\omega_V t + T_V) = \sin\omega_V t\right| = e^{\beta T_V} \qquad (46)$$

K tomu přísluší logaritmický dekrement útlumu δ

$$\delta = \ln\Delta = \beta T_V \qquad (47)$$

c) Mez aperiodicity $\beta = \omega_0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$ jsou stejné kořeny - dvojný kořen

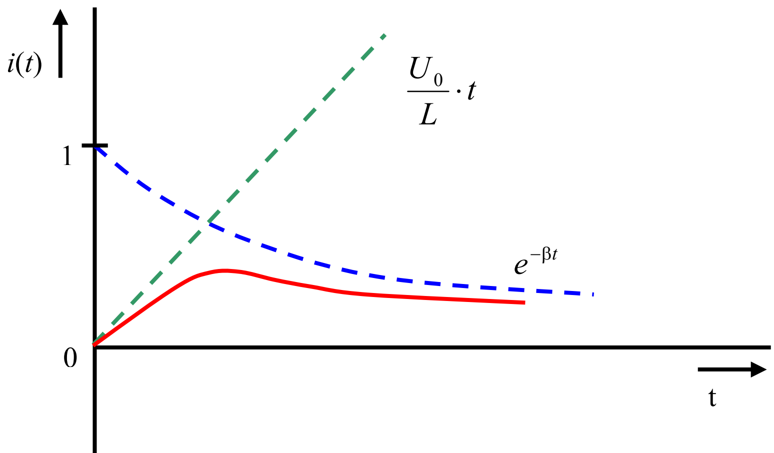
Hranice stanovená v bodě a) - ***mez aperiodicity*** - nastává při $\beta = \omega_0$, charakteristický polynom má pouze jeden dvojný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$**.** V takovém případě má diferenciální rovnice 2. řádu řešení ve tvaru[11)]

$$i(t) = (K_1 + K_2\cdot t)\cdot e^{\lambda t} = (K_1 + K_2\cdot t)\cdot e^{-\beta t} \qquad (48)$$

Z počáteční podmínky určíme, že $i(0) = (K_1 + K_2\cdot 0)\cdot e^0 = K_1 = 0$. Z derivace vztahu (48) - pro $K_1 = 0$ - určíme, že $i'(0) = \left[K_2\cdot(1)\cdot e^{-\beta t} + K_2\cdot t\cdot(-\beta)\cdot e^{-\beta t}\right]_{t\to 0} = K_2 = U_0/L$. Proto

$$i(t) = \frac{U_0}{L}\cdot t\cdot e^{-\beta t} \qquad (49)$$

Grafické znázornění tohoto děje je kvalitativně na obr. 12.



Obr. 12 *Aperiodické nabíjení kapacitoru - mez aperiodicity*

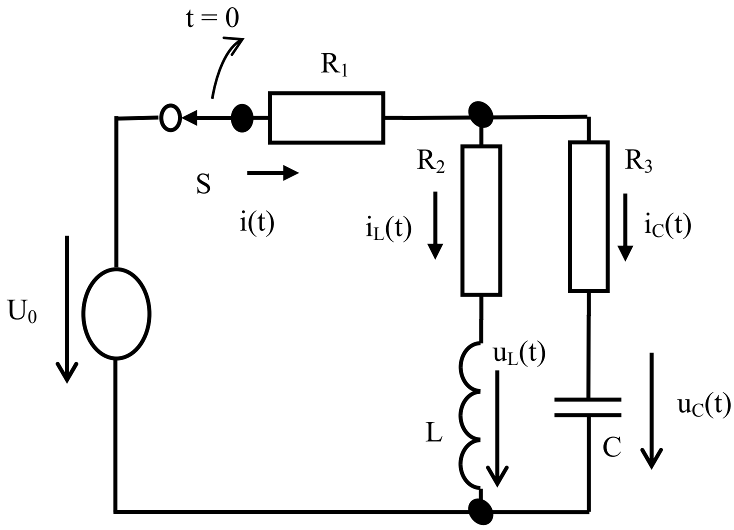
Metodika určování počátečních podmínek a derivací stavových veličin pro obvody 2. řádu

Z předchozího příkladu je zřejmé, že pro řešení obvodů 2. řádu musíme znát nejenom stavové veličiny $i_L(0)$ a $u_C(0)$, ale i jejich derivace (to jsou již matematické podmínky), aby bylo možné určit i druhou konstantu potřebnou pro vyřešení diferenciální rovnice (diferenciálního modelu obvodu). Postup předvedeme na řešení konkrétního příkladu - obr. 13.

---

[1] Ke stejnému výsledku se můžeme dopracovat i určením limity vztahu (45);

$$\lim_{\beta\to\omega_0}\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} = 0 = \omega_V;\quad \lim_{\omega_V t\to 0}(\sin\omega_V t) = \omega_V t;\quad \lim_{\omega_V t\to 0}\left(I_{0V}\cdot e^{-\beta t}\cdot\sin\omega_V t\right) = \frac{U_0}{\omega_V L}\cdot e^{-\beta t}\cdot\omega_V\cdot t$$

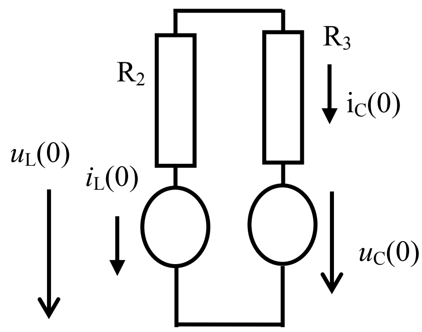


Obr. 13 *Odpojení zdroje napětí v obvodu 2. řádu*

1. ustálený stav (spínač S sepnut) je určen tím, že proud $i_C(0_-) = 0$ (kapacitor je v ustáleném stavu "rozpojen"), napětí na induktoru je nulové - $u_L(0_-) = 0$ (induktor v ustáleném stavu nahrazujeme zkratem). Snadno určíme, že $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) = U_0/(R_1 + R_2)$ a napětí na kapacitoru je dáno napětím na R_2, tedy $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) = U_0 R_2/(R_1 + R_2)$.

Těsně po rozpojení spínače S lze nakreslit ***náhradní schéma*** na obr. 14.

Obvod má dvě větve (v = 2) a dva uzly (q = 2), počet nezávislých uzlů je tedy m = q - 1 = 1 a počet nezávislých větví je n = v - 1 = 1. Musíme proto sestavit jednu rovnici pomocí 1. Kirchhoffova zákona



Obr. 14 *Náhradní schéma obvodu z obr. 13 těsně po rozpojení spínače S*

a jednu rovnici pomocí 2. Kirchhoffova zákona.

Z 1. Kirchhoffova zákona: $i_C(0) + i_L(0) = 0$, tedy $i_C(0) = -\, i_L(0)$.

Z 2. Kirchhoffova zákona: $R_2 i_L(0) + u_L(0) = R_3 i_C(0) + u_C(0)$

tedy (platí $L \cdot \mathrm{d}i_L(0)/\mathrm{d}t = u_L(0)$

$R_2 i_L(0) + L\mathrm{d}i_L(0)/\mathrm{d}t = -R_3 i_L(0) + u_C(0)$

Nyní již můžeme určit po dosazení za dříve určené hodnoty, že

$$\mathrm{d}i_L(0)/\mathrm{d}t = -\frac{1}{L} \cdot \frac{U_0 R_3}{R_1 + R_2}$$

Rovněž musí (vždy) platit, že

$i_{\mathrm{C}}(0) = C\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(0)/\mathrm{d}t = -i_{\mathrm{L}}(0) = -U_0/(R_1 + R_2)$

odkud snadno určíme, že

$\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}(0)/\mathrm{d}t = -U_0/\left[C \cdot (R_1 + R_2)\right]$.

Tím jsou určeny derivace stavových veličin v čase 0, pomocí známých, již dříve definovaných postupů.

Text k prostudování

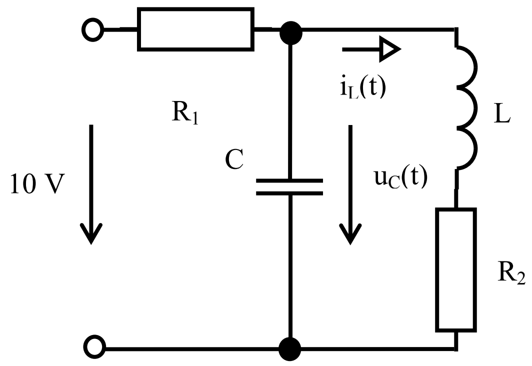
[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha 1999; kapitola 6

Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 10

Příklady

1. Určete hodnoty stavových veličin pro obvod na obrázku 15 .



Obr. 15 *Obrázek k určení stavových veličin R_1 = 5 kΩ; R_2 = 5 kΩ;*

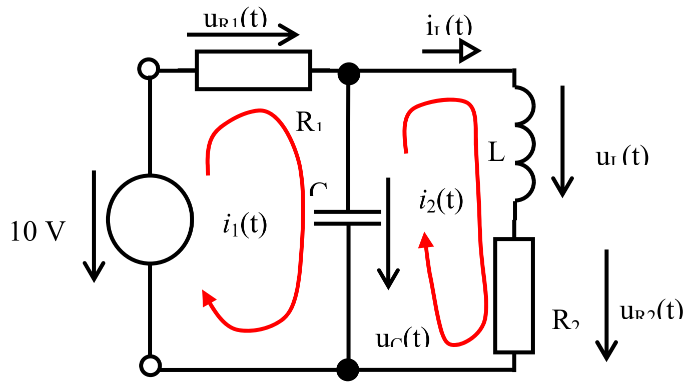
Řešení:

Stavovou veličinou je napětí kapacitoru a proud induktorem. V ustáleném stavu je napětí na induktoru (ideálním) nulové a proud kapacitorem (ideálním) neprotéká. Napětí na kapacitoru je proto dáno pouze odporovým děličem - pro dané poměry tedy 5 V. Proud induktorem je definován oběma rezistory v sériovém řazení, tedy právě 1 mA.

2. V obrázku 15 se skokem změní napětí z hodnoty 0 V na hodnotu 10 V. Sestavte integrodiferenciální popis obvodu (nápověda - použijte metodu smyčkových proudů).

Řešení:

Situace je znázorněna na obrázku 16. Vyznačíme dva smyčkové proudy a sestavíme dvě rovnice pro smyčkové proudy, které představují matematický model obvodu (v časové oblasti).



Obr. 16 *Zobrazení smyčkových proudů*

Nyní již snadno určíme, že (aplikace 2. Kirchhoffova zákona) platí:

$-10 + u_{R1}(t) + u_C(t) = 0\,;\qquad -u_C(t) + u_L(t) + u_{R2}(t) = 0$

$u_{R1}(t) = R_1 \cdot i_1(t);\;\; u_{R2}(t) = R_2 \cdot i_2(t)$ - Ohmův zákon

$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\mathrm{d}t = \left|\text{ superpozice }\right| = \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]\mathrm{d}t$ - ze zákona kontinuity

$u_L(t) = L\cdot \mathrm{d}i_L(t)/\mathrm{d}t = L\cdot \mathrm{d}i_2(t)/\mathrm{d}t$ - Faradayův zákon

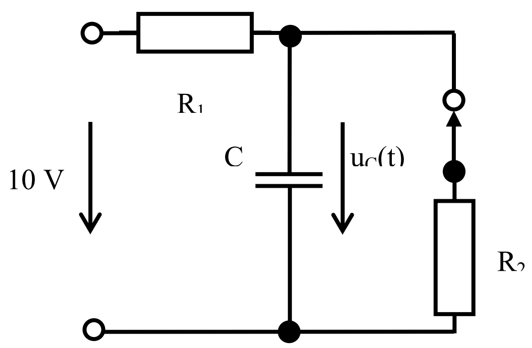
Nyní již můžeme určit pomocí elementárních úprav, že

$$\left[R_1 i_1(t) + \frac{1}{C}\int i_1(t)\mathrm{d}t\right] - \frac{1}{C}\int i_2(t)\mathrm{d}t = 10$$

$$-\frac{1}{C}\int i_1(t)\mathrm{d}t + \left[R_2 i_2(t) + \frac{1}{C}\int i_2(t)\mathrm{d}t + L\cdot \mathrm{d}i_2(t)/\mathrm{d}t\right] = 0$$

Pro odstranění integrálů je třeba obě rovnice derivovat, potom budou v rovnicích i derivace 2. řádu, jedná se o obvod 2. řádu.

3. Určete obecně průběh napětí na kapacitoru C - obrázek 17 - odpojí-li se rezistor R2 .



Obr. 17 *Určení napětí kapacitoru C*

Řešení:

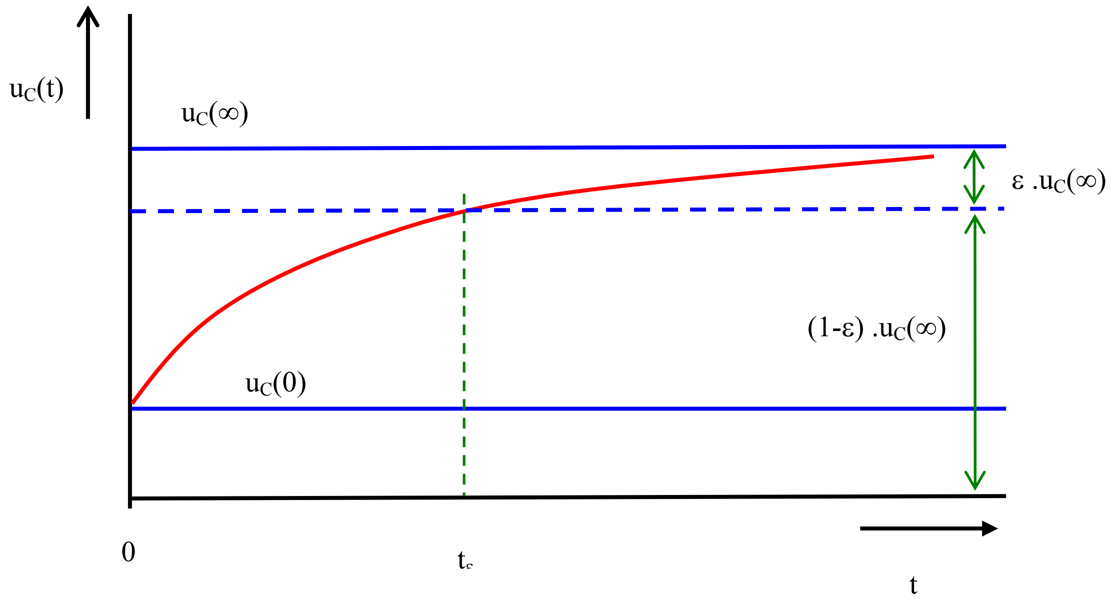
Před odpojením R_2 je napětí na kapacitoru určeno odporovým děličem, takže $u_C(0_-) = u_C(0_+) = 10.R_2/(R_1+R_2)$ - počáteční podmínka. Po odpojení R_2 platí po nekonečně dlouhé době, že $u_C(\infty) = 10$ V (partikulární řešení - u_{Cp}(t)). Po odpojení R_2 platí $10 + u_{R1}(t) + u_C(t) = 0$,tedy

$R_1.i(t) + u_C(t) = -10$ .Protože $i(t) = i_C(t) = C.\ du_C(t)/dt$, dostaneme $R_1\ C.\ du_C(t)/dt + u_C(t) = -10$, tedy po úpravách $du_C(t)/dt + u_C(t)/\tau = -10/\tau$, kde $\tau = R_1\ C$ je časová konstanta obvodu. Řešení homogenní rovnice má tvar $u_{Ch}(t) = K.\exp(-t/\tau)$, celkové řešení je dáno součtem partikulárního řešení a řešení homogenní rovnice: $u_C(t) = K.\exp(-t/\tau) + u_C(\infty)$. To musí vyhovět počáteční podmínce: $u_C(0) = K.\exp(-0/\tau) + u_C(\infty)$, odkud získáme hodnotu konstanty $K = u_C(0) - u_C(\infty)$, takže řešení v obecném tvaru je:

$u_C(t) = [u_C(0) - u_C(\infty)].\exp(-t/\tau) + u_C(\infty)$

4. Určete dobu, za kterou dosáhne napětí $u_C(t)$ v příkladu 3 úroveň 90% ustálené hodnoty, je-li na kondenzátoru těsně před odpojením R2 napětí 5 V (nápověda: vyjádřete pomocí časové konstanty obvodu).

Řešení:



Obr. 18 *Grafické znázornění odezvy obvodu*

Pro dané podmínky platí, že $u_C(0) = u_C(\infty)/2$; hodnotě 90% odpovídá údaj $(1 -\varepsilon)\ .\ u_C(\infty)$, kde $\varepsilon = 0{,}1$. V čase t_ε musí na základě předchozího řešení platit, že

$(1-\varepsilon)\ .u_C(\infty) = [\ u_C(0) - u_C(\infty)].\exp(-t_\varepsilon/\tau) + u_C(\infty)$

Po základních úpravách zjistíme, že $\exp(t_\varepsilon/\tau) = [u_C(\infty)-u_C(0)]/\ [\varepsilon\ .u_C(\infty)]$, odkud logaritmováním určíme, že

$t_\varepsilon / \tau = \ln\{[u_C(\infty) - u_C(0)]/[\varepsilon \cdot u_C(\infty)]\}$. Pro dané poměry tedy platí, že

$t_{0,1} / \tau = \ln\{[u_C(\infty) - u_C(\infty)/2]/[0{,}1 \cdot u_C(\infty)]\} = \ln 10 = 2{,}302$. Vztah lze používat zcela obecně - viz obrázek 18.

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co je to stavová veličina?

2. Čím je definován řád obvodu?

3. Jaký význam má časová konstanta obvodu?

4. Proč vzniká přechodný děj?

5. Mohou vznikat aperiodické kmity v obvodech 1. řádu?

Odpovědi naleznete v [1] na str. 127, 123, 129, 125, 127y

Úlohy k řešení

1. Jakého řádu je obvod na obrázku 15?

2. Určete průběh napětí na kapacitoru C na obr. 17, jestliže je spínač v základním stavu rozepnutý a v čase 0 se připojí rezistor R_2.

3. Určete dobu, za kterou dosáhne napětí $u_C(t)$ v příkladu 3 úroveň 99% ustálené hodnoty.

4. Určete na obr. 15 stavové veličiny a jejich derivace v čase 0, je-li v čase 0 odpojen zdroj napětí 10 V.

5. Určete časový průběh proudu na obr. 15, je-li odpojen zdroj napětí 10 V.

Klíč k řešení úkolů

1. Postup je zřejmý z řešení příkladu 2.

2. Napětí $u_C(0)$ na kapacitoru (R_2 odpojen) je rovno napětí 10 V, ustálená hodnota (v "nekonečnu") při připojeném R_2 je (pro dané poměry) 5 V. Nyní již lze použít přímo vztah (11) nebo sestavit diferenciální model, a ten řešit. Výsledek musí být stejný.

3. Postup je obdobný jako v příkladu 4.

4. Postup je obdobný jako v článku *9.4.2*.

5. Postup je obdobný jako v článku *9.4*.

Autokontrola

Pokud jste reagovali správně na více jak polovinu podnětů z každé oblasti, pokračujte ve studiu jiné kapitoly, pokud ne, pak text studijní opory znovu prostudujte a opakovaně vypracujte odpovědi na podněty.

Zadání samostatné práce č. 2:

1. V obvodu na *obr. 6* je připojován harmonický zdroj napětí. Znázorněte časový průběh harmonického zdroje napětí s amplitudou 1 V pro dvě různé zvolené hodnoty úhlu φ_{U} (pro ωt = 0 až 2π). Znázorněte časový průběh proudu - vztah (31) - pro $I_{\mathrm{m}\omega}$ = 1 A a dva zvolené rozdíly $\varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{RL}}$, je-li: τ = 1 s, ω = 1 rad.s^{-1}. Kdy nenastane přechodný děj? - nápověda: násobitel členu $-e^{-t/\tau}$ ve vztahu (31) musí nabýt nulové hodnoty.

2. Pro integrodefirenciální rovnici (matematický model sériového zapojení induktoru, rezistoru, kapacitoru a zdroje) $Li' + Ri + Di^x = u$ odvoďte vztahy pro tlumení, vlastní kmitočet a rezonanční kmitočet obvodu.

3. Dvojbrany, rozdělení dvojbranů. Rovnice neautonomního dvojbranu, řízené zdroje

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět:

- používat šipkovou konvenci dvojbranů a umět je klasifikovat.
- určit parametry lineárních dvojbranů ze stavů naprázdno a nakrátko.
- přiřadit ekvivalentní obvodové modely k rovnicím dvojbranu.
- určit parametry regulárního řazení dvojbranů.
- určit vztah mezi jednotlivými typy parametrů dvojbranu

Výklad

3.1 Úvod - základní úvahy a terminologie

V praxi se velmi často vyskytují obvody (části obvodů, prvky obvodů), které jsou k jiným částem obvodů připojeny dvěma dvojicemi svorek - dvěma **branami**. Přitom ani není důležité, jak jsou tyto obvody "uvnitř" složité - vnitřní poměry nás vlastně vůbec nezajímají, pokud umíme jednoznačně definovat funkční závislosti mezi obvodovými veličinami bran. Hovoříme o **dvojbranu** a tento dvojbranový přístup může velmi zefektivnit teoretickou analýzu elektrických obvodů, významně klesá počet rovnic nutný k modelování obvodu.

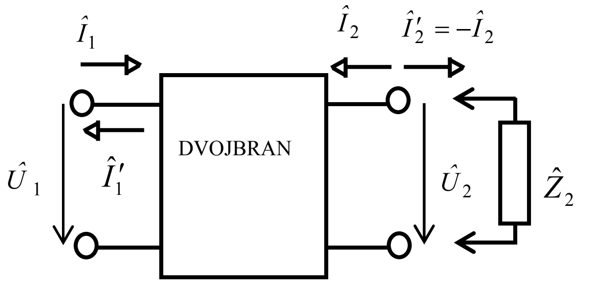
Bývá zvykem označovat jednu bránu jako bránu **vstupní** a druhou bránu jako bránu **výstupní.** Vhodnější je však asi hovořit o **bráně 1** a **bráně 2**, protože obecně nemusí být vždy zcela jisté, která bude vlastně vstupem a která výstupem.

Základní konvence "branových" veličin je uvedena na *obr. 1*. Jedná se o **konvenci spotřebičovou**.

Kladný součet činných výkonů brány 1 a brány 2 tak představuje spotřebu energie dvojbranem - jedná se o **dvojbran pasívní.**

Záporný součet činných výkonů brány 1 a brány 2 tak představuje dodávání energie z dvojbranu do okolního obvod - jedná se o **dvojbran aktivní**.

Nulový součet činných výkonů brány 1 a brány 2 představuje hraniční stav, energetická bilance je vyvážená - jedná se o **dvojbran bezeztrátový**.



***Obr. 1** Šipková konvence branových veličin*

Tak je vymezeno i jedno důležité hledisko pro klasifikaci dvojbranů - podle energetické bilance dvojbranu.

Budeme zkoumat situaci pro **lineární** obvody v ustáleném harmonickém stavu, tedy budeme pracovat s pojmem admitance, impedance (přechod k Laplaceovým obrazům pro nulové počáteční podmínky je zřejmý).

Velmi důležité je zařazení dvojbranu mezi **dvojbrany lineární** (klasifikace "podle linearity"). Při řešení lineárních dvojbranů lze využívat principu superpozice a tím i jednoduché maticové modely dvojbranů. Znamená to, že žádný parametr popisující dvojbran nesmí být funkcí branových veličin. Jen tak lze používat pro určování parametrů "jednoduchých" stavů **naprázdno** a **nakrátko** - jak bude uvedeno dále. Podmínka lineárnosti je v praxi většinou splněna jen v jistém okolí tzv. pracovního bodu.

Obsahuje-li dvojbran nezávislý zdroj energie, může tedy dodávat trvale činný výkon (energii), nazývá se **autonomní.** Proti tomu máme dvojbrany (či spíše jejich modely) **neautonomní -** obsahují pasivní prvky a řízené zdroje, neobsahují však nezávislý zdroj energie. Tuto skupinu dvojbranů je vhodné lépe specifikovat. Řízenými zdroji se modelují elektronky, tranzistory, operační zesilovače, jiné zesilující struktury - dvojbran považujeme v tomto smyslu za **aktivní**. Ve skutečnosti však použité modely platí pouze ve vhodných pracovních bodech zesilujících struktur - a ty mohou nastavit (zajistit) pouze nezávislé zdroje. Řízené zdroje tak jen popisují (modelují) distribuci energie ze zdroje nezávislého, který se již v modelech (schématech) většinou nekreslí. Každý autonomní dvojbran lze v tomto smyslu popsat pomocí neautonomního dvojbranu a nezávislého zdroje.

Z *obr. 1* je zřejmé, že k popisu dvojbranu máme **čtyři veličiny**, dvě **branová napětí** a dva **branové proudy**. Budeme vytvářet (hledat) funkční závislosti dvou veličin (závislých) na dvou veličinách nezávislých. Dvě nezávislé veličiny ze čtyř možností lze vybrat právě

$$\binom{4}{2} = 6$$

způsoby (kombinace). Existuje proto právě 6 možností jak dvojbran popsat. Je zřejmé, že mezi těmito popisy musí být jednoznačné vztahy, protože analýza obvodů musí být vždy jednoznačná. Vlastnosti daného dvojbranu jsou jednoznačně definovány kterýmkoliv popisem.

Pro další úvahy je důležitá elementární skutečnost plynoucí z poměrů na *obr. 1*. Jistě platí, že (Ohmův zákon - zobecněný tvar)

$$\hat{Z}_2 = \hat{U}_2 / \hat{I}'_2 = \left| \hat{I}'_2 = -\hat{I}_2 \right| = -\hat{U}_2 / \hat{I}_2 \qquad (1)$$

zatěžovací impedance popsaná veličinami brány 2 je tedy "se znaménkem záporným".

Dále se budeme zabývat popisem (modely) neautonomních lineárních dvojbranů v ustáleném harmonickém režimu.

3.2 Rovnice (matematické modely) a obvodové modely dvojbranů

Postupnou volbou dvojic nezávisle proměnných získáme šest modelů dvojbranu. Zde je důležité poznamenat, že i samotné seřazení (pořadí) proměnných veličin představuje již konvenci. Při studiu z různých zdrojů je nutné velmi pečlivě tuto konvenci porovnávat, protože formálně stejné parametry ("písmena") mohou v každém zdroji znamenat něco úplně jiného. Doporučuji dodržovat konvenci používanou v [Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha1998] a v tomto textu. Konvence používaná v [Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981] se dnes již nepoužívá - je třeba studovat velmi opatrně.

Impedanční modely (charakteristiky)

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branové proudy. Závisle proměnné veličiny jsou potom branová napětí, která (díky linearitě) můžeme popsat jako **lineární kombinaci proudů**:

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 ; \qquad \hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 \tag{2}$$

což můžeme zapsat ve tvaru maticovém:

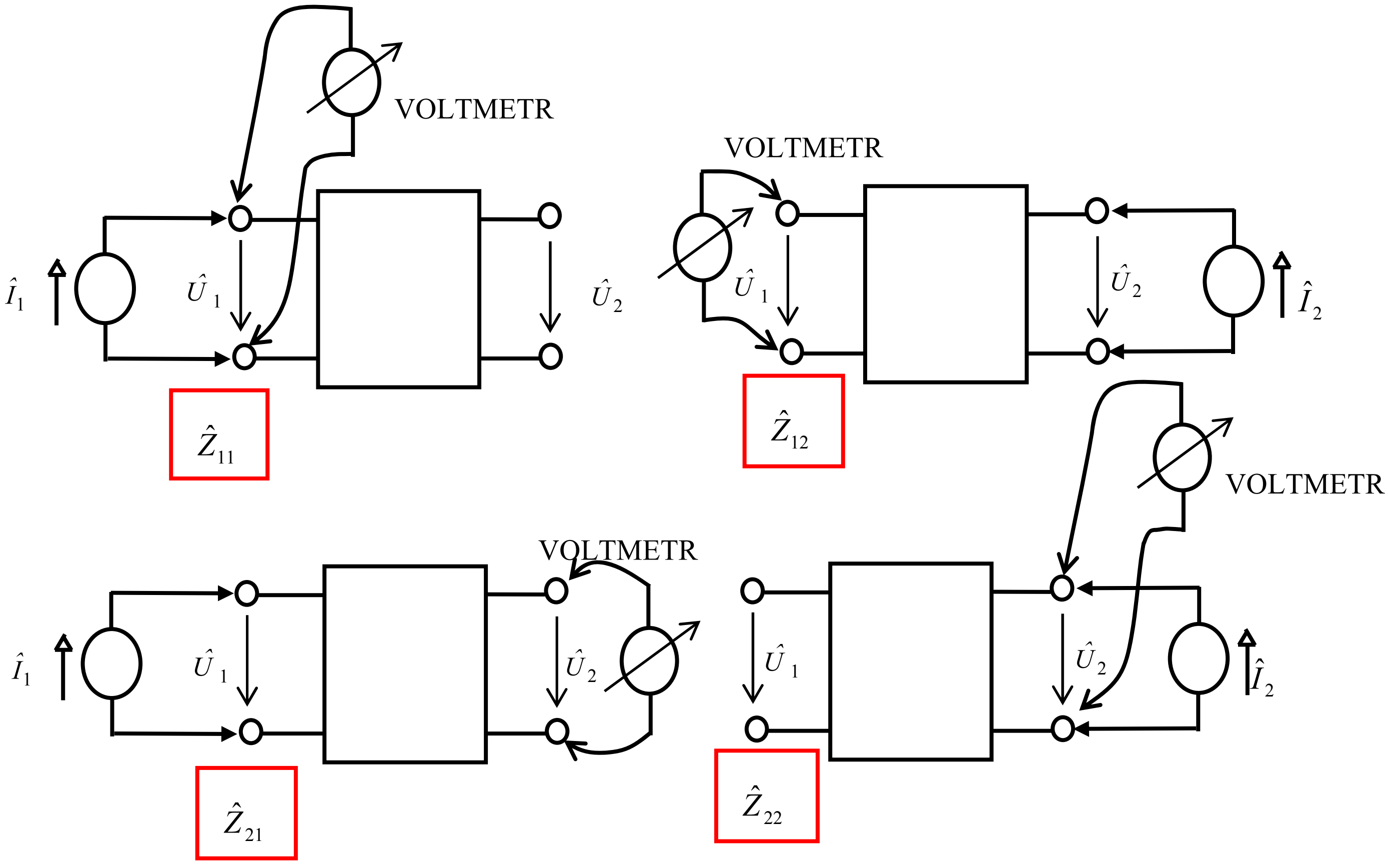
$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Je zřejmé, že rozměrem parametrů **impedanční matice**

$$\left[\hat{Z}\right] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

je [Ω]. Touto maticí je dvojbran jednoznačně charakterizován.

Všechny parametry impedanční matice můžeme snadno určit **ze stavů naprázdno** - viz znázornění poměrů na *obr. 2* (budíme zdroji proudu do patřičné brány, ideální voltmetr představuje nekonečně velkou impedanci - tedy rozpojený obvod, odpovídající proud je nulový).



Obr. 2 *Princip určován impedančních charakteristik dvojbranu (prvků impedanční matice) ze stavů naprázdno.*

Z rovnic (2) snadno určíme:

vstupní impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} \tag{5}$$

přenosovou impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} \tag{6}$$

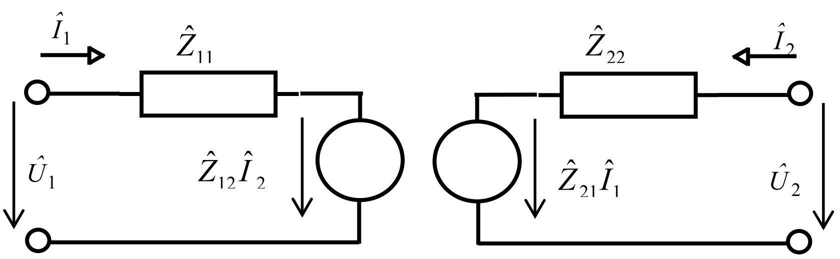
přenosovou impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} \tag{7}$$

výstupní impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} \tag{8}$$

Rovnicím (2) - **matematický model** - ovšem můžeme snadno přiřadit i **obvodový model** na *obr. 3* (který je zcela nezávislý na skutečném fyzickém uspořádání dvojbranu). Vyjdeme z 2. Kirchhoffova zákona. Pokud si uvědomíme, že ideální zdroje napětí $\hat{Z}_{12}\hat{I}_2$ a $\hat{Z}_{21}\hat{I}_1$ (řízené branovými proudy) nejsou ovlivněny protékajícími proudy, je platnost rovnic (2) očividná.



Obr. 3 *Obvodový impedanční model dvojbranu.*

Je zřejmé, že **obecný** dvojbran je definován (charakterizován) **čtyřmi** různými nezávislými **parametry**.

Je-li dvojbran složen pouze z pasivních prvků, musí být jeho impedanční popis symetrický okolo hlavní diagonály, protože pasivní obvod je vždy **reciproký -** musí zřejmě platit, že $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$. Reciproký dvojbran je tedy definován pouze **třemi** nezávislými **parametry**.

Existuje i skupina reciprokých dvojbranů, u nichž se obvodové poměry nezmění záměnou vstupu a výstupu - jedná se o dvojbrany **souměrné**. To může platit pouze tehdy, jsou-li shodné parametry $\hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{22}$. Souměrné (reciproké) dvojbrany jsou charakterizovány pouze **dvěma** nezávislými **parametry**.

❑ Admitanční modely (charakteristiky)

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branová napětí. Závisle proměnné veličiny jsou potom branové proudy, které (díky linearitě) můžeme popsat jako **lineární kombinaci napětí**:

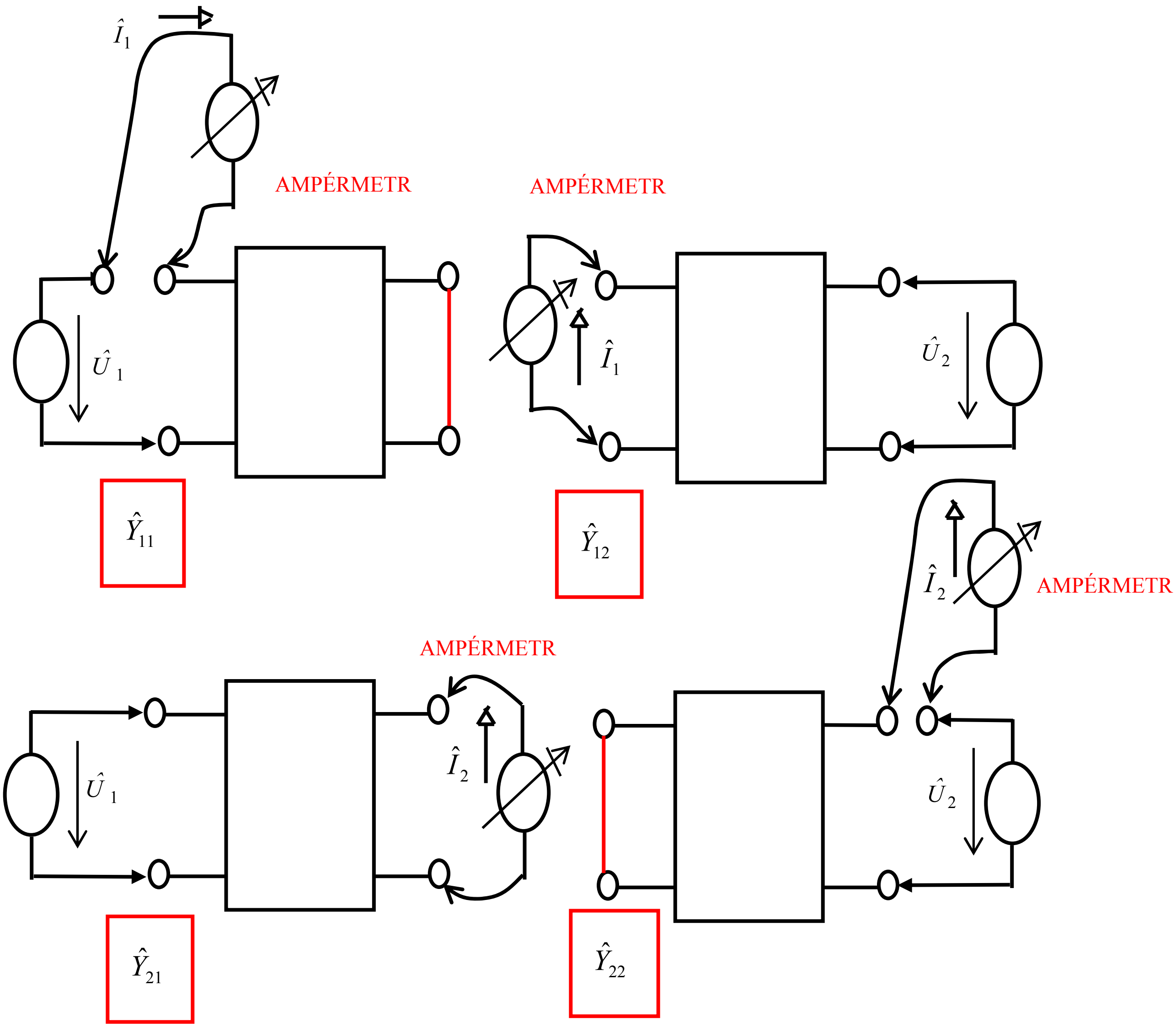
$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{U}_2\,; \qquad \hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2 \tag{9}$$

Odpovídající zápis pomocí **admitanční matice** má tvar

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

parametry (charakteristiky dvojbranu) mají rozměr [S].

Všechny parametry impedanční matice můžeme snadno určit **ze stavů nakrátko** - viz znázornění poměrů na *obr. 4* (dvojbran budíme zdroji napětí na patřičné bráně, ideální ampérmetr představuje nulovou impedanci - tedy napětí na něm je nulové).



Obr. 4 *Princip určován admitančních charakteristik dvojbranu (prvků admitanční matice) ze stavů nakrátko.*

Z rovnic (9) snadno určíme:

vstupní admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{11} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1}\right|_{U_2=0} \tag{11}$$

přenosovou admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{12} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{U_1=0} \tag{12}$$

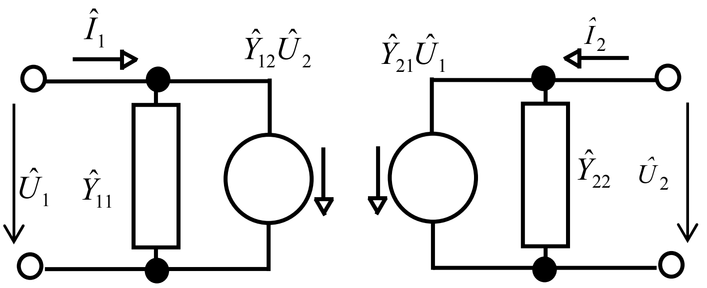
přenosovou admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_1}\right|_{U_2=0} \tag{13}$$

výstupní admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2}\right|_{U_1=0} \tag{14}$$

Rovnicím (9) můžeme i zde snadno přiřadit **obvodový model** - *obr. 5* (který je opět nezávislý na skutečném fyzickém uspořádání dvojbranu). Vyjdeme z 1. Kirchhoffova zákona. Pokud si uvědomíme, že ideální zdroje proudu $\hat{Y}_{12}\hat{U}_2$ a $\hat{Y}_{21}\hat{U}_1$ (řízené branovými napětími) nejsou ovlivněny přiloženými napětími, je platnost rovnic (9) zřejmá.



***Obr. 5** Obvodový admitanční model dvojbranu.*

Obecný dvojbran je opět definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry. Je-li dvojbran **reciproký**, musí být jeho admitanční popis symetrický okolo hlavní diagonály **-** musí zřejmě platit, že $\hat{Y}_{12} = \hat{Y}_{21}$. Reciproký dvojbran je tedy definován pouze **třemi** nezávislými **parametry**. Je-li reciproký a **souměrný** musí platit $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$. Souměrné (reciproké) dvojbrany jsou charakterizovány pouze **dvěma** nezávislými **parametry** (viz impedanční model).

❑ Smíšené modely (charakteristiky)

Další dvě volby nezávislých parametrů vedou k výběru jedné veličiny vstupní a jedné veličiny výstupní - proto smíšené.

Smíšený sériově paralelní model

Sériově paralelní model[2] proto, že je vhodný při řešení obvodů, kde jsou vstupy (brány 1) dvojbranů řazeny sériově, výstupy (brány 2) dvojbranů paralelně. Potom je vhodná taková volba proměnných, aby řazení prvků v obvodu brány 1 bylo sériové, jako je tomu na *obr. 3* a aby řazení prvků v obvodu brány 2 bylo paralelní, jako je tomu na *obr. 5*.

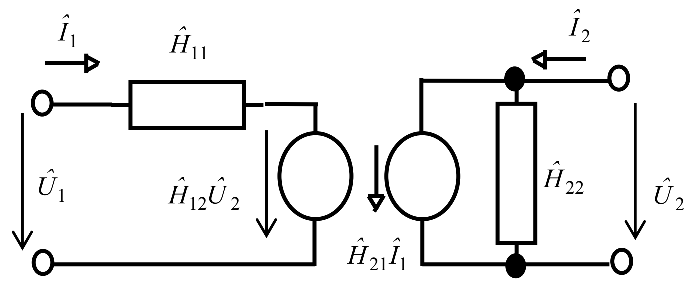
Toho dosáhneme tím, že za nezávisle proměnné veličiny volíme proud brány 1 a napětí brány 2. Maticový zápis má potom tvar

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Význam jednotlivých prvků matice (a jejich rozměr) nyní určujeme ze stavů naprázdno a nakrátko, analogicky dříve uvedeným postupům. Platí

$$\hat{H}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{U_2=0} \; ; \quad \hat{H}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_1=0} \; ; \quad \hat{H}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1}\right|_{U_2=0} \; ; \quad \hat{H}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2}\right|_{I_1=0} \tag{16}$$

Také "smíšený" obvodový model na *obr. 6* sestavíme pomocí již uvedených postupů, aplikací 2. Kirchhoffova zákona na první řádek vztahu (15) a 1. Kirchhoffova zákona na druhý řádek vtahu (15).



Obr. 6 *Obvodový sériově paralelní model.*

Smíšený paralelně sériový model

Je vhodný pro řešení obvodů, kde jsou brány 1 řazeny paralelně a brány 2 sériově. Proti předchozí situaci se pouze zamění požadavky na řazení prvků v obvodech jednotlivých bran. Potřebné struktury dosáhneme tak, že za nezávisle proměnné volíme napětí brány 1 a proud brány 2. Tomu odpovídá matematický model

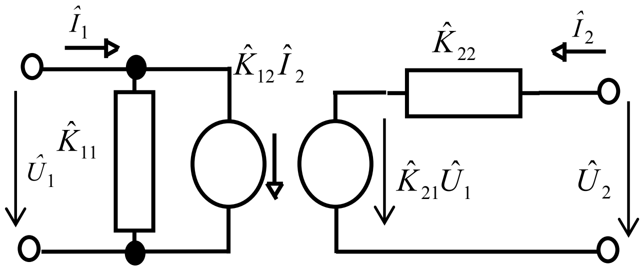
$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Ze stavů naprázdno a nakrátko určíme, že

$$\hat{K}_{11} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1}\right|_{I_2=0} \; ; \quad \hat{K}_{12} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right|_{U_1=0} \; ; \quad \hat{K}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|_{I_2=0} \; ; \quad \hat{K}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{U_1=0} \tag{18}$$

[2] Z tohoto hlediska by bylo systémově správné označovat **impedanční popis** jako **sériově sériový model** a ***admitanční popis*** označovat jako ***paralelně paralelní model***.

Rozměry jednotlivých prvků matice jsou zřejmé. Odpovídající model obvodový je na *obr. 7*.



***Obr.** 7 Paralelně sériový obvodový model.*

Obecný dvojbran je vždy definován **čtyřmi** nezávislými parametry. Podmínku reciprocity a souměrnosti budeme zkoumat v souvislosti se zkoumáním vztahů mezi jednotlivými popisy.

❑ Kaskádní a zpětně kaskádní modely (charakteristiky)

Kaskádní model

Za nezávisle proměnné veličiny volíme napětí a proud brány 2. Je to výhodné tehdy, řadíme-li dvojbrany kaskádně - to znamená, že propojujeme vždy bránu 2 s branou 1 následujícího dvojbranu nebo v případě, kdy je brána 2 zatížena pasívním dvojpólem. Zkoumáme přenos signálu od brány 1 k bráně 2.

Při dodržení jednotné šipkové konvence "napříč" dvojbrany to potom vede k volbě matematického popisu (konvence), který je:

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ \hat{I}'_2 \end{bmatrix} \tag{19}$$

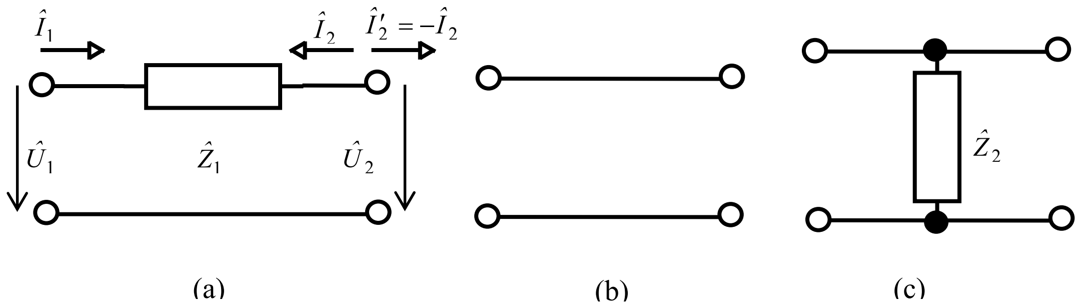
Právě konvence vyznačená "čárkovaným" proudem $\hat{I}'_2$ je používána v celé klasické literatuře. Volbou znaménka mínus u proudu "nečárkovaného" se tak vůbec nic nezměnilo na definici kaskádních charakteristik dvojbranu.

Jednotlivé prvky matice (a jejich rozměr) opět vyplývají ze stavů naprázdno a nakrátko:

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0} \quad ; \quad \hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0} \quad ; \quad \hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0} \quad ; \quad \hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0} \tag{20}$$

Příklad 1.

Určete kaskádní modely jednoduchých dvojbranů na obr. 8



***Obr. 8** Jednoduché dvojbrany k příkladu 1.*

Řešení:

dvojbran (a)

Pro $\hat{I}'_2 = 0$ platí v tomto jednoduchém případě, že $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$ (na impedanci nevznikne úbytek napětí) a dále $\hat{I}_1 = \hat{I}'_2 = 0$, proto

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = 1; \qquad \hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0} = \frac{0}{\hat{U}_1} = 0$$

Pro $\hat{U}_2 = 0$ platí $\hat{I}_1 = \hat{I}'_2 = \hat{U}_1 / \hat{Z}_1$. Proto

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1 / \hat{Z}_1} = \hat{Z}_1; \qquad \hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_1} = 1$$

Pro dvojbran (a) tak dostáváme matematický model (kaskádní) $\left[\hat{A}\right]_a = \begin{bmatrix} 1 & \hat{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

dvojbran (b)

Pro $\hat{I}'_2 = 0$ platí, že $\hat{I}_1 = \hat{I}'_2 = 0$ a $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$. Pro $\hat{U}_2 = 0$ platí, že $\hat{I}_1 = \hat{I}'_2 \to \infty$. Proto

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = 1; \qquad \hat{A}_{12} = \lim_{I'_2 \to \infty} \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0} = 0;$$

$$\hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0} = \frac{0}{\hat{U}_1} = 0; \qquad \hat{A}_{22} = \lim_{I'_2 \to \infty} \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0} = 1$$

Pro dvojbran (b) tak získáváme kaskádní matici $\left[\hat{A}\right]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

dvojbran (c)

Pro $\hat{I}_2' = 0$ platí $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$ a $\hat{I}_1 = \hat{U}_1 / \hat{Z}_2 = \hat{U}_1 \hat{Y}_2$. Pro $\hat{U}_2 = 0$ platí, že $\hat{I}_1 = \hat{I}_2' \to \infty$. Proto

$$\hat{A}_{11} = \left. \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = 1; \qquad \hat{A}_{12} = \lim_{I_2' \to \infty} \left. \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2'} \right|_{U_2=0} = 0;$$

$$\hat{A}_{21} = \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} \right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\hat{U}_1 \hat{Y}_2}{\hat{U}_1} = \hat{Y}_2; \qquad \hat{A}_{22} = \lim_{I_2' \to \infty} \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2'} \right|_{U_2=0} = 1$$

Tomu odpovídá kaskádní model $\left[\hat{A}\right]_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{Y}_2 & 1 \end{bmatrix}$.

■

Zpětně kaskádní model

Tento model (poslední možnost ze šesti modelů) je výhodný při zkoumání přenosu signálu od brány 2 k bráně 1. Nezávisle proměnné jsou veličiny brány 1. To vede k matematickému modelu (viz *obr. 1*)

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ -\hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1' \end{bmatrix} \tag{21}$$

Pro proud vstupní brány ("s čárkou" a "bez čárky") platí úvaha analogická úvaze pro kaskádní model. Snadno určíme význam jednotlivých prvků modelu:

$$\hat{B}_{11} = \left. \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \right|_{I_1=0}; \quad \hat{B}_{12} = \left. \frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_1} \right|_{U_1=0}; \quad \hat{B}_{21} = \left. \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_1} \right|_{I_1=0}; \quad \hat{B}_{22} = \left. \frac{\hat{I}_2}{-\hat{I}_1} \right|_{U_1=0} \tag{22}$$

3.3 Vzájemné vztahy mezi charakteristikami dvojbranů

Každý dvojbran je jednoznačně charakterizován libovolným ze šesti uvedených modelů. Každý model je však výhodný pro řešení jiné obvodové situace, jak se ukáže při analýze různých zapojení dvojbranů. Proto je výhodné znát vzájemné vztahy (přepočty, transformace) mezi jednotlivými charakteristikami, abychom si mohli kterýkoliv model "dopočítat" z modelu, který známe. K těmto vztahům se snadno dopracujeme formálními úpravami příslušných matematických modelů - jejich lineárními transformacemi. Problém objasníme na několika příkladech. Převodní tabulka je k dispozici např. v [Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha1998].

Imitanční modely

Zapišme si vztah (3) ve formální podobě

$$\left[\hat{U}\right] = \left[\hat{Z}\right] \cdot \left[\hat{I}\right]$$

Platí tedy i

$$\left[\hat{Z}\right] \cdot \left[\hat{I}\right] = \left[\hat{U}\right]$$

Násobíme-li obě strany rovnice inverzní impedanční maticí $\left[\hat{Z}\right]^{-1}$ zleva, dostáváme

$$\left[\hat{Z}\right]^{-1}\cdot\left[\hat{Z}\right]\cdot\left[\hat{I}\right]=\left[\hat{Z}\right]^{-1}\cdot\left[\hat{U}\right]$$

Součin inverzní matice a "původní" matice se ovšem rovná jednotkové matici, takže platí

$$\left[\hat{I}\right]=\left[\hat{Z}\right]^{-1}\cdot\left[\hat{U}\right] \tag{23}$$

Srovnáním vztahu (23) se vztahem (10) snadno zjistíme, že platí

$$\left[\hat{Y}\right]=\left[\hat{Z}\right]^{-1} \tag{24}$$

Obdobně určíme, že

$$\left[\hat{Z}\right]=\left[\hat{Y}\right]^{-1} \tag{25}$$

Pro dvojbrany prostě platí, že

$$\left[\hat{Z}\right]\cdot\left[\hat{Y}\right]=\left[\hat{Y}\right]\cdot\left[\hat{Z}\right]=1$$

tedy **impedanční a admitanční matice jsou navzájem inverzní.**

Lze tak určit, že platí

$$\left[\hat{Z}\right]=\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{Y}_{22}}{\left|\hat{Y}\right|} & \dfrac{-\hat{Y}_{12}}{\left|\hat{Y}\right|}\\ \dfrac{-\hat{Y}_{21}}{\left|\hat{Y}\right|} & \dfrac{\hat{Y}_{11}}{\left|\hat{Y}\right|}\end{bmatrix} \tag{26}$$

kde $\left|\hat{Y}\right|$ je determinant admitanční matice.

Pro "opačný" převod jen stačí zaměnit (duálně) symboly *Y* a *Z*, jak je zřejmé z "formalismu" řešení.

Imitanční modely určené z modelu kaskádního

K dispozici máme popis vyjádřený vztahem (19), cílem je získat popis definovaný vztahem (3) - tedy i vztahy (2).

Z druhého řádku vztahu (19) určíme, že

$$\hat{I}_1=\hat{A}_{21}\hat{U}_2-\hat{A}_{22}\hat{I}_2\Rightarrow\hat{U}_2=\hat{I}_1/\hat{A}_{21}+\hat{I}_2\hat{A}_{22}/\hat{A}_{21} \tag{27}$$

Srovnáním s druhým řádkem vztahu (3) určíme přímo, že musí platit

$$\hat{Z}_{21}=1/\hat{A}_{21};\quad \hat{Z}_{22}=\hat{A}_{22}/\hat{A}_{21} \tag{28}$$

Nyní již můžeme upravovat první rovnici (řádek) vztahu (19), za $\hat{U}_2$ dosadíme ze vztahu (27):

$$\begin{aligned}&\hat{U}_1=\hat{A}_{11}\left(\hat{I}_1/\hat{A}_{21}+\hat{I}_2\hat{A}_{22}/\hat{A}_{21}\right)-\hat{A}_{12}\hat{I}_2\\&\Rightarrow\hat{U}_1=\hat{I}_1\hat{A}_{11}/\hat{A}_{21}+\hat{I}_2\left(\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}-\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}\right)/\hat{A}_{21}\end{aligned} \tag{28}$$

Srovnáním s první rovnicí vztahu (3) určíme, že musí platit:

$$\hat{Z}_{11}=\hat{A}_{11}/\hat{A}_{21};\qquad \hat{Z}_{12}=\left(\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}-\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}\right)/\hat{A}_{21}=\left|\hat{A}\right|/\hat{A}_{21} \tag{29}$$

Vztahy (28) a (29) definují impedanční matici dvojbranu ***pomocí parametrů matice kaskádní.***

Upravíme-li první řádek vztahu (19) do podoby

$$\hat{I}_2 = -\hat{U}_1 / \hat{A}_{12} + \hat{U}_2 \hat{A}_{11} / \hat{A}_{12}$$

a tento výsledek dosadíme do druhé rovnice vztahu (19) a upravíme do podoby

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1 \hat{A}_{22} / \hat{A}_{12} + \hat{U}_2 \left(\hat{A}_{21} \hat{A}_{12} - \hat{A}_{11} \hat{A}_{22} \right) / \hat{A}_{12}$$

můžeme srovnání se vztahy (9) nebo (10) určit parametry ***admitanční matice*** vyjádřené ***pomocí parametrů kaskádní matice***:

$$\hat{Y}_{11} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{12}; \quad \hat{Y}_{12} = -\left|\hat{A}\right| / \hat{A}_{12}; \quad \hat{Y}_{21} = -1 / \hat{A}_{12}; \quad \hat{Y}_{22} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{12} \tag{30}$$

Stejným "upravovacím" postupem bychom mohli postupovat u impedančních modelů, výsledek musí být, pochopitelně, shodný se vztahem (26).

Známe-li transformační vztahy pro kaskádní model a imitanční modely, můžeme vyšetřit **podmínku reciprocity** - její "projev" **v kaskádním popisu**. Musí platit, že $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$, tedy

$$\hat{Z}_{12} = \left|\hat{A}\right| / \hat{A}_{21} = \hat{Z}_{21} = 1 / \hat{A}_{21}$$

Pro reciproký obvod proto musí platit, že determinant matice je roven jedné:

$$\left|\hat{A}\right| = 1 \tag{31}$$

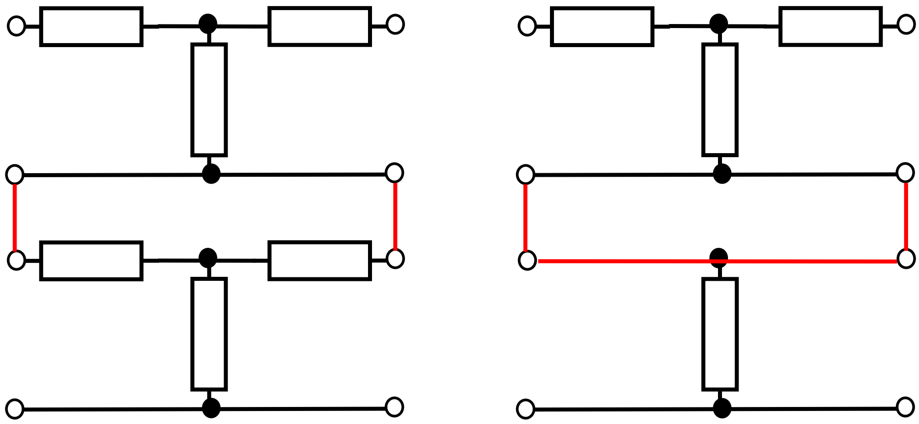
Stejně ovšem musí platit, že $\hat{Y}_{12} = \hat{Y}_{21}$, tedy $-\left|\hat{A}\right| / \hat{A}_{12} = -1 / \hat{A}_{12}$. Opět dostaneme podmínku vyjádřenou vztahem (31). To je také naprosto v pořádku, protože je-li obvod reciproký, musí být shodná podmínka dodržena "přes" všechny modely.

Je-li **dvojbran i podélně souměrný**, musí platit, že $\hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{22}$, $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$. Pro kaskádní popis potom musí platit: $\hat{Z}_{11} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21} = \hat{Z}_{22} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{21}$ nebo $\hat{Y}_{11} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{12} = \hat{Y}_{22} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{12}$, což vede ke stejnému závěru

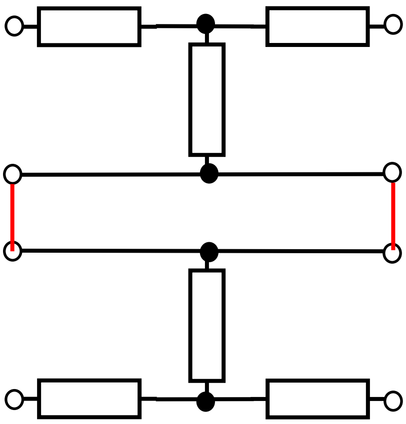
$$\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22} \tag{32}$$

3.4 Řazení dvojbranů

Máme k dispozici modely dvojbranů, které jsme získali měřením (výpočtem vlastností) samotného dvojbranu. Začneme-li dvojbrany mezi sebou propojovat, platí dříve uvedený popis (model) pouze tehdy, nezmění-li se propojením vlastnosti (a tedy ani modely) jednotlivých dvojbranů. Říkáme, že **propojení** (spojení) dvojbranů musí být **regulární**.



(a) (b)



(c)

Obr. 9 *a) Neregulární zapojení dvou článků T;*

b) tomu odpovídající zapojení dvojbranů;

c) regulární zapojení dvou článků T;

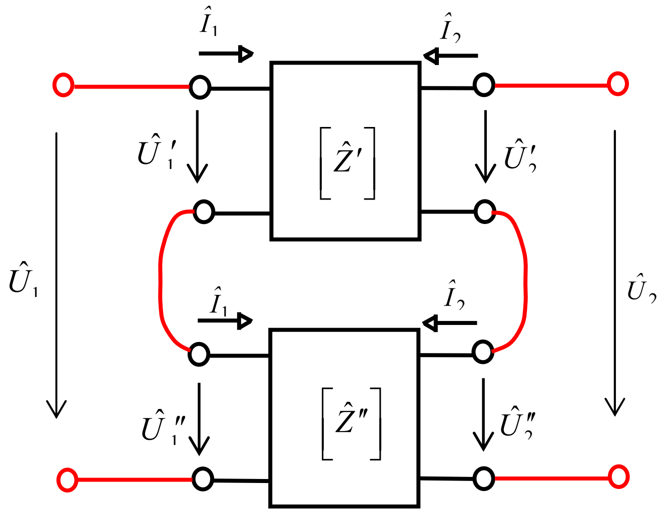
*článek T je dvojbran s **krajní příčnou nesouměrností***

Předveďme si tento problém na typické situaci - *obr. 9*. Pokud budeme určovat charakteristiky každého dvojbranu zvlášť, budou jejich popisy obdobné (při stejných obvodových prvcích stejné). Zapojením podle *obr. 9a* se však vlastnosti dolního dvojbranu změní, jeho horní rezistory jsou zkratovány - viz ekvivalentní situace na *obr. 9b* - zapojení na *obr. 9a* je **neregulární**. Nemůžeme proto situaci modelovat pomocí dříve stanovených parametrů pro dolní člen T. Vlastnosti dolního dvojbranu bychom museli stanovit podle situace na *obr. 9b*. Naproti tomu, zapojení na *obr. 9c* je regulární, vlastnosti jednotlivých dvojbranů se propojením nemění.

V dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že propojení dvojbranů je regulární, takže stanovené modely se propojením nikdy nemění.

❑ Sériové řazení (sériově sériové)

Pod pojmem řazení dvojbranů rozumíme vždy řazení bran. Při ***sériovém řazení*** jsou řazeny **do série všechny brány 1** - protéká jimi tedy ***stejný proud (znak sériovosti)***. **Do série** jsou řazeny i **všechny brány 2** - protéká jimi stejný proud. Situaci předvedeme pro dva dvojbrany. Snadno však nahlédneme, že úvahy lze rozšířit na libovolný počet dvojbranů (je-li jejich propojení regulární; poznámka platí i pro všechna další řazení) - *obr. 10*.



Obr. 10 *Sériové propojení dvojbranů.*

Z platnosti 2. Kirchhoffova zákona snadno určíme

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{U}_1'\\ \hat{U}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{U}_1''\\ \hat{U}_2''\end{bmatrix}=\left|\begin{matrix}\hat{I}_1=\hat{I}_1'=\hat{I}_1''\\ \hat{I}_2=\hat{I}_2'=\hat{I}_2''\\ \textit{sériové}\end{matrix}\right|=\left[\hat{Z}'\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}+\left[\hat{Z}''\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}=\left[\hat{Z}\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}$$

kde

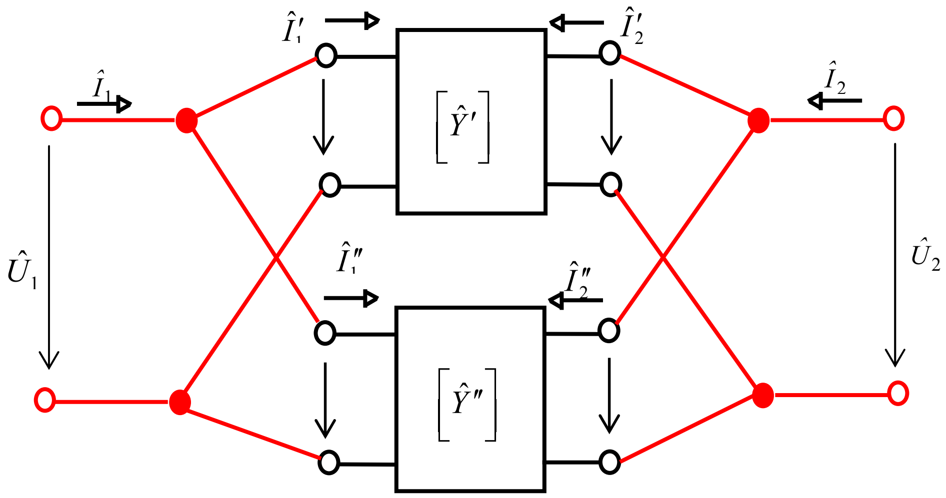
$$\left[\hat{Z}\right]=\left[\hat{Z}'\right]+\left[\hat{Z}''\right] \tag{33}$$

je výsledná impedanční ***matice sériového řazení dvojbranů*** - je rovna ***součtu*** jednotlivých ***impedančních matic***.

❑ Paralelní řazení (paralelně paralelní)

Při paralelním řazení jsou brány 1 řazeny ***paralelně*** a brány 2 rovněž. Na branách je v tomto případě *stejné napětí* (***znak paralelnosti***). Situace (pro dva dvojbrany) je znázorněna na *obr. 11*.

Z 1. Kirchhoffova zákona určíme



Obr. 11 *Paralelní propojení dvojbranů.*

$$\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{I}_1'\\ \hat{I}_2'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{I}_1''\\ \hat{I}_2''\end{bmatrix}=\left|\begin{matrix}\hat{U}_1=\hat{U}_1'=\hat{U}_1''\\ \hat{U}_2=\hat{U}_2'=\hat{U}_2''\\ paralelní\end{matrix}\right|=[\hat{Y}']\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}+[\hat{Y}'']\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}=[\hat{Y}]\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}$$

kde

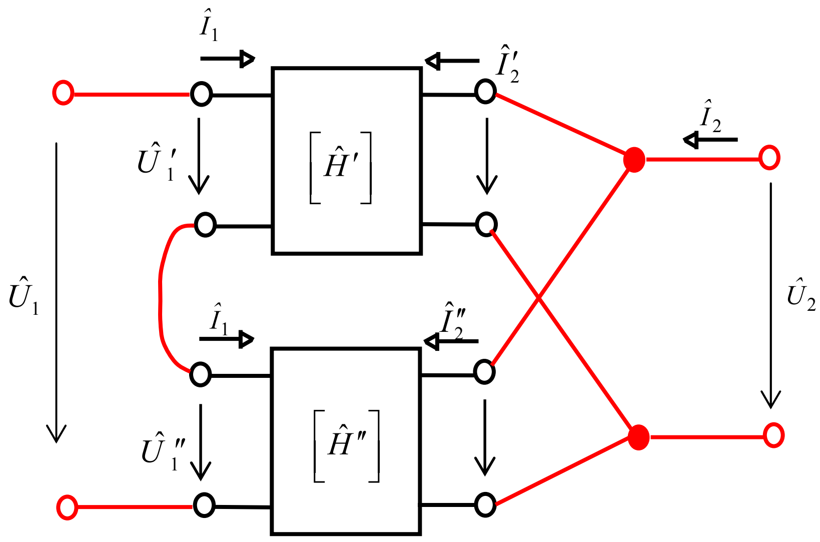
$$[\hat{Y}]=[\hat{Y}']+[\hat{Y}''] \tag{34}$$

je výsledná ***admitanční matice paralelního řazení dvojbranů*** - je rovna **součtu** jednotlivých **admitančních matic.**

❑ Smíšené (hybridní) řazení

Sériově paralelní řazení

Brány 1 jsou řazeny do série (protéká jimi stejný proud), brány 2 jsou řazeny paralelně (stejná napětí bran) - viz *obr. 12*.



Obr. 12 *Sériově paralelní propojení dvojbranů.*

Analogicky předchozím případům určíme za použití vztahu (15), že ($\hat{I}_1' = \hat{I}_1'' = \hat{I}_1$; $\hat{U}_2' = \hat{U}_2'' = \hat{U}_2$)

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1' \\ \hat{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{U}_1'' \\ \hat{I}_2'' \end{bmatrix} = \ldots = [\hat{H}] \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix}$$

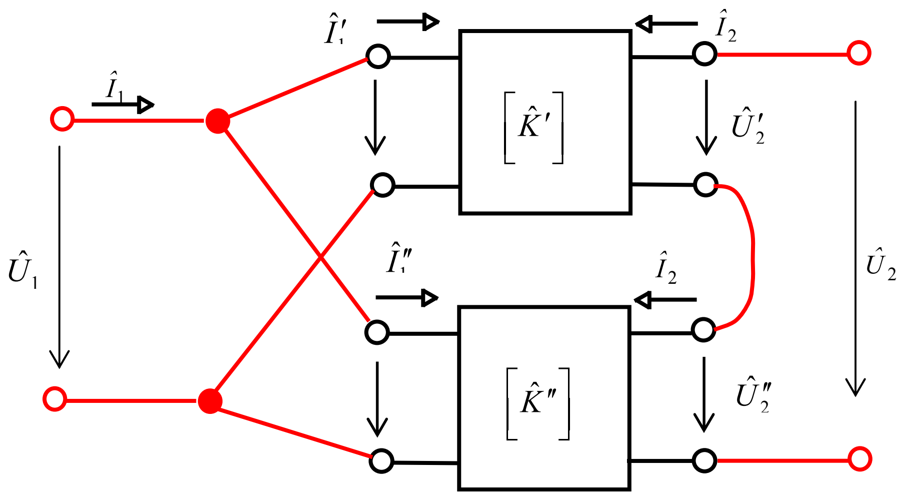
kde

$$[\hat{H}] = [\hat{H}'] + [\hat{H}''] \tag{35}$$

je výsledná sérioparelelní matice.

Paralelně sériové řazení

Brány 1 jsou řazeny paralelně, brány 2 do série - viz *obr. 13*.



Obr. 13 *Paralelně sériové propojení dvojbranů.*

Při použití vztahu (17) určíme, že ($\hat{U}_1' = \hat{U}_1'' = \hat{U}_1$; $\hat{I}_2' = \hat{I}_2'' = \hat{I}_2$)

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1' \\ \hat{U}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{I}_1'' \\ \hat{U}_2'' \end{bmatrix} = \ldots = \left[\hat{K}\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

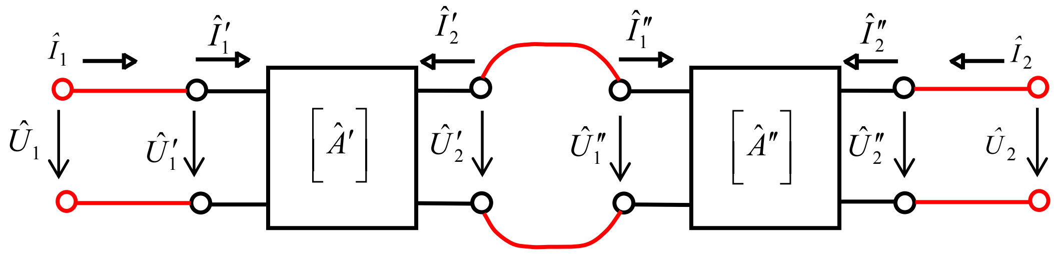
kde

$$\left[\hat{K}\right] = \left[\hat{K}'\right] + \left[\hat{K}''\right] \qquad (36)$$

je výsledná paralelně sériová matice řazení z *obr. 13*.

❑ Kaskádní řazení bran

Kaskádní řazení bran je na *obr. 14*. K bráně 2 prvního dvojbranu je připojena brána 1 dvojbranu následujícího. Takové zapojení je vždy **regulární**. Zřejmě platí



***Obr. 14** Kaskádní propojení dvojbranů.*

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1' \\ \hat{I}_1' \end{bmatrix} = \left| vztah(19) \right| = \left[\hat{A}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2' \\ -\hat{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{U}_2' = \hat{U}_1'' \\ -\hat{I}_2' = \hat{I}_1'' \end{vmatrix} = \left[\hat{A}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1'' \\ \hat{I}_1'' \end{bmatrix} = \left| vztah(19) \right| =$$

$$= \left[\hat{A}'\right] \cdot \left[\hat{A}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2'' \\ -\hat{I}_2'' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{U}_2'' = \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 = -\hat{I}_2'' \end{vmatrix} = \left[\hat{A}'\right] \cdot \left[\hat{A}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

Výsledná kaskádní matice je tedy dána součinem

$$\left[\hat{A}\right] = \left[\hat{A}'\right] \cdot \left[\hat{A}''\right] \qquad (37)$$

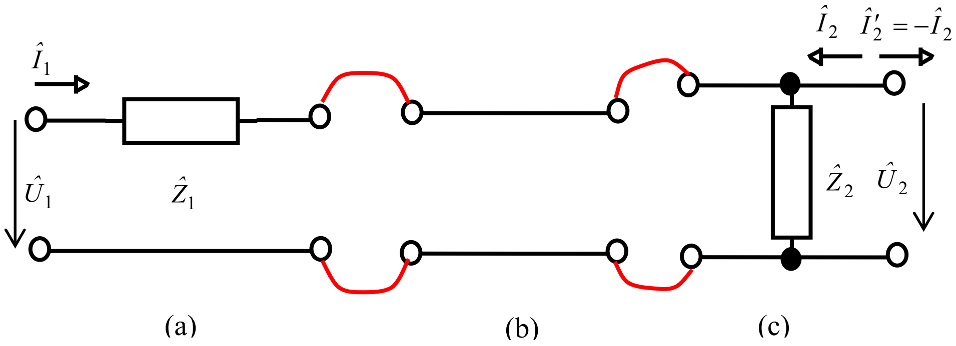
Pravidlo lze rozšířit na libovolný počet dvojbranů. Součin matic však není komutativní operací, pořadí dvojbranů má na výslednou matici zásadní vliv (pokud nejsou dvojbrany, tedy i jejich maticové modely, stejné).

Příklad 2.

a) Určete výslednou kaskádní matici řazení dvojbranů na obr. 15.

b) Zkontrolujte reciprocitu.

c) Stanovte kaskádní matici výsledného dvojbranu přímo z definice parametrů.



***Obr. 15** Jednoduché dvojbrany k příkladu 1.*

Řešení:

Kaskádní modely dvojbranů a, b, c jsou stanoveny v příkladu 1.

a) Výsledný model je součinem jednotlivých matic podle pořadí v kaskádě, tedy

$$[\hat{A}]=\begin{bmatrix}1 & \hat{Z}_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{Y}_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\hat{Z}_1\hat{Y}_2 & \hat{Z}_1\\ \hat{Y}_2 & 1\end{bmatrix}$$

(násobení jednotkovou maticí lze vynechat - odpovídá pouze "prostému vodičovému" propojení - nic "nemění").

b) Pro reciproký obvod musí být determinat kaskádní matice roven jedné, tedy

$$\begin{vmatrix}1+\hat{Z}_1\hat{Y}_2 & \hat{Z}_1\\ \hat{Y}_2 & 1\end{vmatrix}=(1+\hat{Z}_1\hat{Y}_2)\cdot(1)-(\hat{Z}_1)\cdot(\hat{Y}_2)=1$$

Podmínka reciprocity je splněna, to je pro pasivní obvod správný výsledek.

Pro $\hat{I}'_2=0$ platí, že $\hat{I}_1=\hat{U}_1/(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)$, $\hat{U}_2=\hat{Z}_2\cdot\hat{U}_1/(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)$.

c) Pro $\hat{U}_2=0$ platí, že $\hat{I}_1=\hat{I}'_2=\hat{U}_1/\hat{Z}_1$. Z definičních vztahů určíme, že

$$\hat{A}_{11}=\left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0}=(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)/\hat{Z}_2=1+\hat{Z}_1\hat{Y}_2;\qquad \hat{A}_{12}=\left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0}=\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1/\hat{Z}_1}=\hat{Z}_1$$

$$\hat{A}_{21}=\left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0}=\frac{\hat{U}_1/(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)}{\hat{Z}_2\cdot\hat{U}_1/(\hat{Z}_1+\hat{Z}_2)}=\hat{Y}_2;\qquad \hat{A}_{22}=\left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0}=\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_1}=1$$

To je stejný výsledek, jako jsme získali v bodě a).

■

Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.:Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha1998; podkapitola 4.1 a 4.3

Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, kapitola 8.

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co je to dvojbran?

2. Kolik je možných popisů dvojbranu (různých typů parametrů)?

3. Co je to regulární řazení dvojbranů?

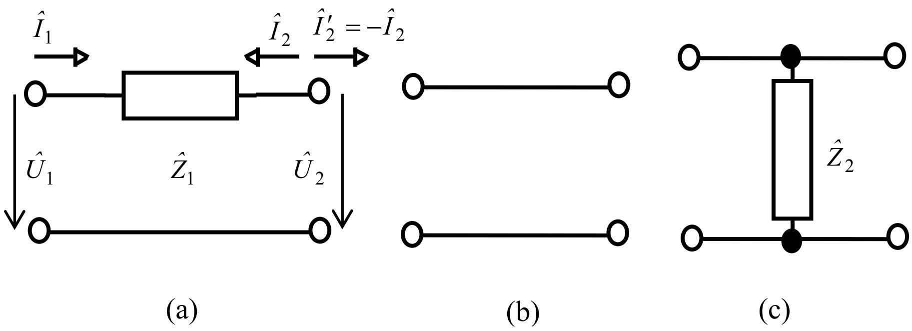
4. Co se rozumí stavem naprázdno a nakrátko (lze tuto metodiku popisu použít i u nelineárních obvodů?

Odpovědi naleznete v části „Výklad“ a v uvedené literatuře

Úlohy k řešení

1. (3x1bod) Při běžné šipkové konvenci je U_1 = 5 V, I_1 = 0,1 A a: a) U_2 = 2 V, I_2 = 0,2 A; b) U_2 = 2 V, I_2 = -0,25 A; c) U_2 = 2 V, I_2 = -0,3 A; posuďte situace z hlediska pasivity a aktivity dvojbranu.

2. (3x2body) Určete kaskádní parametry dvojbranů (a), (b), (c).



Obrázek k úkolu 2

3. (celkem 6 bodů) Nakreslete ekvivalentní model dvojbranu na základě sérioparelelních rovnic (3 body); definujte parametry $\hat{H}$ (3 body).

4. (celkem 6 bodů) Posuďte regulárnost kaskádního řazení dvojbranů z úkolu č. 2, určete matici v pořadí (a) $\rightarrow$ (b) $\rightarrow$ (c) (4 body) a udělejte kontrolu reciprocity (2 body).

5. (5 bodů) Určete impedanční matici odpovídající kaskádní matici z úkolu č. 4 (lineární transformací).

Klíč k řešení

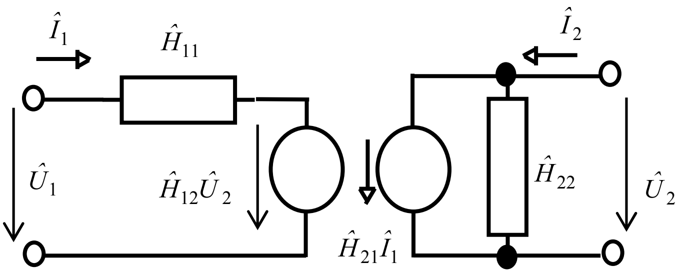
1. Při spotřebičové orientaci je výkon dodávaný do obvodu určen vztahem

$P = U_1I_1 + U_2I_2$. Pro $P > 0$ se jedná o obvod pasivní, pro $P = 0$ bezeztrátový a pro $P < 0$ o obvod **aktivní.** Vždy platí $U_1I_1 = 5.0,1 = 0,5$ W. Dále a) $P = 0,5 + 2.0,2 = 0,9$ W - pasivní dvojbran; b) $P = 0,5 + 2.(-0,25) = 0$ W - bezeztrátový dvojbran; c) $P = 0,5 + 2.(-0,3) = -0,1$ W - aktivní dvojbran.

2. Situace je shrnuta v tabulce. Konvence je vyznačena u dvojbranu (a).

DVOJBRAN	(a)	(b)	(c)
$\hat{A}_{11} = \hat{U}_1/\hat{U}_2\ (\hat{I}'_2 = 0)$	1	1	1
$\hat{A}_{12} = \hat{U}_1/\hat{I}'_2\ (\hat{U}_2 = 0)$	$\hat{Z}_1$	$\hat{U}_1/\infty \to 0$	$\hat{U}_1/\infty \to 0$
$\hat{A}_{21} = \hat{I}_1/\hat{U}_2\ (\hat{I}'_2 = 0)$	0	0	$\hat{Y}_2$
$\hat{A}_{22} = \hat{I}_1/\hat{I}'_2\ (\hat{U}_2 = 0)$	1	$\infty/\infty \to 1$	$\infty/\infty \to 1$

3. Sérioparalelní rovnice mají tvar $\hat{U}_1 = \hat{H}_{11}\hat{I}_1 + \hat{H}_{12}\hat{U}_2$; $\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 + \hat{H}_{22}\hat{U}_2$. Tomu odpovídá ekvivalentní model na obrázku.



Ekvivalentní model sérioparalelních rovnic

Dále můžeme z rovnic určit, že $\hat{H}_{11} = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 \left(\hat{U}_2 = 0\right)$ - vstupní impedance; $\hat{H}_{12} = \hat{U}_1 / \hat{U}_2 \left(\hat{I}_1 = 0\right)$ - zpětný napěťový přenos; $\hat{H}_{21} = \hat{I}_2 / \hat{I}_1 \left(\hat{U}_2 = 0\right)$ - proudový přenos; $\hat{H}_{22} = \hat{I}_2 / \hat{U}_2 \left(\hat{I}_1 = 0\right)$ - výstupní admitance.

4. Pro kaskádní řazení (zapojení je regulární) násobíme kaskádní matice, zde v pořadí (a)x(b)x(c) - jednotkovou matici lze při násobení vynechat:

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \hat{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{Y}_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \hat{Z}_1\hat{Y}_2 & \hat{Z}_1 \\ \hat{Y}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Pro reciproký obvod (a tím pasivní obvod vždy je) musí být determinant kaskádní matice roven jedné, tedy $\left|\hat{A}\right| = \left(1 + \hat{Z}_1\hat{Y}_2\right) \cdot 1 - \hat{Z}_1\hat{Y}_2 = 1$. To souhlasí.

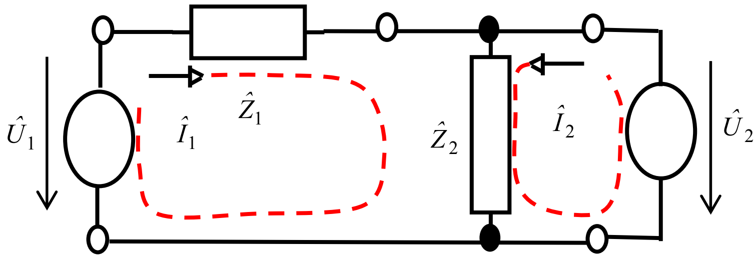
5. Lze odvodit, že platí (viz uvedená literatura)

$$\hat{Z}_{11} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21} = (1 + \hat{Z}_1\hat{Y}_2) / \hat{Y}_2 = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2; \quad \hat{Z}_{12} = \left|\hat{A}\right| / \hat{A}_{21} = 1 / \hat{Y}_2 = \hat{Z}_2;$$

$$\hat{Z}_{21} = 1 / \hat{A}_{21} = \hat{Z}_2; \qquad \hat{Z}_{22} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{21} = \hat{Z}_2.$$

O správnosti výpočtu se můžeme například přesvědčit i vhodně volenou metodou smyčkových proudů - viz obrázek:

Snadno určíme, že



Použití metody smyčkových proudů pro stanovení impedančních parametrů

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_1+\hat{Z}_2 & \hat{Z}_2 \\ \hat{Z}_2 & \hat{Z}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix}$$

Autokontrola

Pokud jste získali z úloh k řešení alespoň **18** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat úlohy k řešení.

Zadání samostatné práce č.3:

1. Určete hodnoty kaskádních parametrů T-článku a π-článku zvolených dvojbranů ve virtuální laboratoři.

4. Dvojbrany - přenosy, vlnové parametry, řízené zdroje

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat přenosy dvojbranu a pochopit jejich význam.
- definovat ideální transformátor a gyrátor a transformaci zatěžovací impedance na vstupní bránu.
- definovat základní aktivní dvojbrany, energetickou bilanci vstupní brány.
- definovat ideální operační zesilovač, přenos invertující a neinvertující struktury.
- vysvětlit obecnou strukturu zpětné vazby.

Výklad

4.1 Úvod

Základní úvahy o dvojbranech, šipková konvence, jejich modely, to vše bylo probráno v předchozí kapitole. V této kapitole budeme vlastně popsané modely aplikovat na obecné problémy. Budeme zkoumat chování elektrických obvodů, ve kterých se vyskytuje dvojbran definovaných vlastností. Protože víme, že dvojbran je modelem obecně libovolně rozsáhlého lineárního systému, dospějeme tímto způsobem k důležitým a obecně platným závěrům.

4.2 Přenosové funkce

Dvojbrany modelují přenosovou cestu mezi zdrojem (signálem) a spotřebičem (zátěží, převodníkem signál-fyzikální veličina - například reproduktor). Požadujeme, aby definovaným způsobem určovaly přenos signálu. Proto definujeme přenosové funkce. Pro ustálený harmonický stav[3] definujeme ***kmitočtové přenosy***

$$\hat{P} = \hat{X}_2 / \hat{X}_1 \tag{1}$$

a inverzní kmitočtové přenosy

$$\hat{G} = \hat{X}_1 / \hat{X}_2 \tag{2}$$

kde $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ jsou postupně fázory na bráně 1 (vstupu) a bráně 2 (výstupu).

[3] Obdobně definujeme i přenosy pro Laplaceovy obrazy poměrem $P(p) = X_2(p)/X_1(p)$ a $G(p) = X_1(p)/X_2(p)$, kde $X_1(p), X_2(p)$ jsou obrazy vstupních a výstupních veličin.

Pomocí branových veličin tak dospějeme k pojmům

napěťový přenos $\hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1$ [bez rozměru] (3)

proudový přenos $\hat{P}_I = \hat{I}_2 / \hat{I}_1$ [bez rozměru] (4)

transimpedance $\hat{P}_{UI} = \hat{U}_2 / \hat{I}_1$ [V/A = Ω] (5)

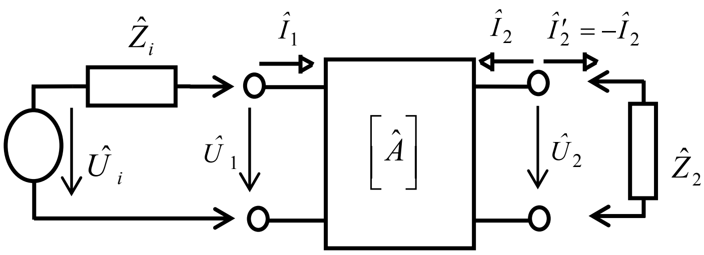
transadmitance $\hat{P}_{IU} = \hat{I}_2 / \hat{U}_1$ [A/V = S] (6)

První dva přenosy jsou bez rozměru, druhé dva jsou s rozměrem - ***smíšené***.

Obecná situace je znázorněna na obr. 1, dvojbran je jednoznačně definován svými kaskádními parametry (modelem):

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2) \tag{7}$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}(-\hat{I}_2) \tag{8}$$



Obr. 1 *Zapojení přenosové cesty;* $\hat{Z}_i$ *- vnitřní impedance zdroje (signálu)* $\hat{U}_i$.

Určeme nejdříve ***vstupní impedanci*** brány 1. Platí (zobecněný Ohmův zákon)

$$\hat{Z}_{vst1} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2)}{\hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}(-\hat{I}_2)} = \left|\hat{U}_2 = \hat{Z}_2 \cdot \hat{I}'_2 = -\hat{Z}_2 \cdot \hat{I}_2\right| = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_2 + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_2 + \hat{A}_{22}} \tag{9}$$

Vstupní impedance je určována i zatěžovací impedancí.

Z poměrů na *obr. 1* nyní můžeme určit vztah mezi napětími $\hat{U}_i$ a $\hat{U}_1$:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_i \hat{Z}_{vst1} / (\hat{Z}_i + \hat{Z}_{vst1}) \tag{10}$$

Je možné definovat externí přenos napětí

$$\hat{P}_{Ue} = \hat{U}_2 / \hat{U}_i = (\hat{U}_2 / \hat{U}_1) \cdot (\hat{U}_1 / \hat{U}_i) = \hat{P}_U \cdot \hat{Z}_{vst1} / (\hat{Z}_i + \hat{Z}_{vst1}) \tag{11}$$

Dále určeme ***výstupní impedanci*** - pomocí Théveninova teorému. Nejdříve určeme napětí naprázdno $\hat{U}_{2p}$ (při $\hat{I}_2 = 0; \hat{Z}_2 \to \infty$). Zřejmě platí ze vztahu (9), že

$$\hat{Z}_{vst1p} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21} \tag{12}$$

a ze vztahu (10): $\hat{U}_{1p} = \hat{U}_i (\hat{A}_{11} / \hat{A}_{21}) / (\hat{Z}_i + \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21})$.

Potom ze vztahu (7) - při $\hat{I}_2 = 0$ - platí

$$\hat{U}_{2p} = \hat{U}_{1p} / \hat{A}_{11} = \hat{U}_i / (\hat{Z}_i \hat{A}_{21} + \hat{A}_{11}) \tag{13}$$

Nyní musíme určit zkratový proud $\hat{I}'_{2k} = \hat{I}'_2(\hat{Z}_2 = 0)$, tedy při $\hat{U}_2 = 0$. Ze vztahu (9) určíme, že

$$\hat{Z}_{vst1k} = \hat{A}_{12} / \hat{A}_{22} \tag{14}$$

Potom $\hat{U}_{1k} = \hat{U}_i(\hat{A}_{12} / \hat{A}_{22}) / (\hat{Z}_i + \hat{A}_{12} / \hat{A}_{22})$ a ze vztahu (7) - pro $\hat{U}_2 = 0$ - určíme, že

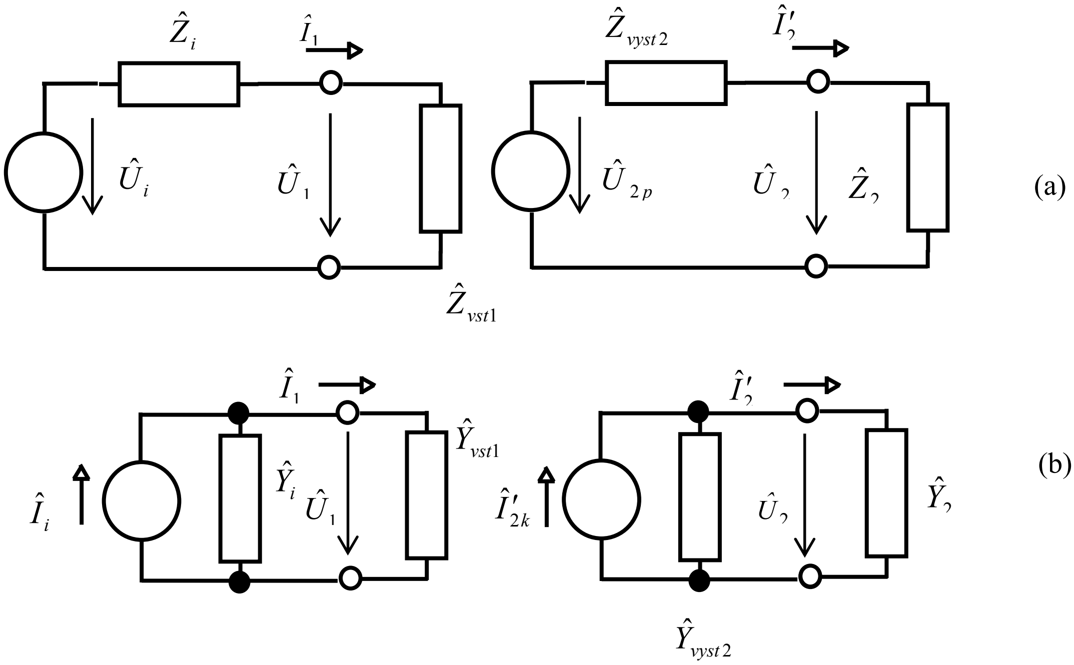
$$-\hat{I}_{2k} = \hat{I}'_{2k} = \hat{U}_{1k} / \hat{A}_{12} = \hat{U}_i / (\hat{Z}_i \hat{A}_{22} + \hat{A}_{12}) \tag{15}$$

Výstupní impedance (brány 2) proto je

$$\hat{Z}_{vyst2} = \hat{U}_{2p} / \hat{I}'_{2k} = (\hat{Z}_i \hat{A}_{22} + \hat{A}_{12}) / (\hat{Z}_i \hat{A}_{21} + \hat{A}_{11}) \tag{16}$$

Výstupní impedance je určována i impedancí zdroje signálu.

Udělané úvahy nám umožňují překreslit situaci na *obr. 1* do ekvivalentní struktury na *obr.2a*.



Obr. 2. *Náhradní schéma přenosové cesty: a) impedanční; b) admitanční.*

Přechod k admitančnímu modelu přenosové cesty na *obr.2b* pomocí Nortonova teorému je zřejmý. Pro ***externí proudový přenos*** platí

$$\hat{P}_{Ie} = \hat{I}'_2 / \hat{I}_i = (\hat{I}'_2 / \hat{I}_1) \cdot (\hat{I}_1 / \hat{I}_i) = \hat{P}_I \cdot \hat{Y}_{vst1} / (\hat{Y}_i + \hat{Y}_{vst1}) \tag{17}$$

4.3 Vlnové (obrazové) přizpůsobení, vlnový tvar kaskádní matice

V tomto článku se omezíme na pasívní (tedy i reciproké) a podélně souměrné dvojbrany. Platí pro ně, že $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$ a determinant $\left|\hat{A}\right| = \hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = \hat{A}^2{}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = 1$. Potom ze vztahů (9) a (16) určíme, že

$$\hat{Z}_{vst1} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_2 + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_2 + \hat{A}_{11}}; \qquad \hat{Z}_{vyst2} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_i + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_i + \hat{A}_{11}} \tag{18}$$

Při přenosu signálu je výhodný stav, kdy vstupní impedance $\hat{Z}_{vst1}$ se rovná právě zatěžovací impedanci, kterou nazveme ***obrazovou impedancí***, tedy $\hat{Z}_{vst1} = \hat{Z}_o$, jestliže $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_o$. Musí tedy platit

$$\hat{Z}_{vst1} = \hat{Z}_o = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_o + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{11}} \tag{19}$$

Po úpravách zjistíme, že

$$\hat{Z}_o^2 = \hat{A}_{12} / \hat{A}_{21} \tag{20}$$

Ze vztahů (12) a (14) můžeme pro $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$ určit, že

$$\hat{Z}_o^2 = \hat{A}_{12} / \hat{A}_{21} = (\hat{A}_{11} / \hat{A}_{21}) \cdot (\hat{A}_{12} / \hat{A}_{11}) = \hat{Z}_{vst1p} \cdot \hat{Z}_{vst1k} \tag{21}$$

Je také zřejmé, že při $\hat{Z}_i = \hat{Z}_o$ platí i $\hat{Z}_{vyst2} = \hat{Z}_o$. Při řazení takových dvojbranů do kaskády, je-li "konec" kaskády zatížen obrazovou impedancí a zdroj signálu má výstupní impedanci rovnou opět obrazové impedanci, je celá kaskáda (v každém místě propojení) ***impedančně přizpůsobena*** (***vlnově, obrazově***). Při tomto obrazovém přizpůsobení se definuje ***obrazový*** (inverzní) ***přenos napětí*** vztahem

$$\hat{G}_{oU} = \hat{U}_1 / \hat{U}_2 \Big|_{\hat{Z}_2 = \hat{Z}_o} \tag{22}$$

a obrazový přenos proudu vztahem

$$\hat{G}_{oI} = \hat{I}_1 / (-\hat{I}_2) \Big|_{\hat{Z}_2 = \hat{Z}_o} = \hat{I}_1 / \hat{I}'_2 \Big|_{\hat{Z}_2 = \hat{Z}_o} \tag{23}$$

Platí ovšem také (pro danou konvenci šipek), že

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1 / \hat{Z}_o$$

$$-\hat{I}_2 = \hat{I}'_2 = \hat{U}_2 / \hat{Z}_o$$

a proto i

$$\hat{G}_{oI} = \frac{\hat{U}_1 / \hat{Z}_o}{\hat{U}_2 / \hat{Z}_o} = \hat{G}_{oU} = \hat{G}_o \tag{24}$$

Obrazový přenos proudu a napětí je shodný - při obrazovém přizpůsobení.

Pro uvedené podmínky přecházejí vztahy (7) a (8) ve vztahy

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2); \qquad \hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{11}(-\hat{I}_2) \tag{25}$$

Můžeme určit, že

$$\begin{aligned} \hat{G}_o &= \hat{U}_1 / \hat{U}_2 = (\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2)) / \hat{U}_2 = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2) / \hat{U}_2 = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12} / \hat{Z}_o = \\ &= |\text{vztah (20)}| = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{21}\hat{Z}_o = |\text{vztah (20)}| = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}} = |\hat{A}_{11}^2 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = 1| = \\ &= \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{11}^2 - 1} \end{aligned} \tag{26}$$

K obrazovému přenosu $\hat{G}_o$ se ***definuje obrazová míra přenosu*** $\hat{g}_o$ vztahem

$$\hat{G}_o = e^{\hat{g}_o} \equiv \exp(\hat{g}_o) = \exp\left(a_o + jb_o\right) = \exp(a_o) \cdot \exp(jb_o) \tag{27}$$

Po logaritmování (přirozený logaritmus) obdržíme vztah

$$a_o + jb_o = \ln \hat{G}_o = \ln\left(\left|\hat{G}_o\right| \cdot \exp(j \arg(\hat{G}_o)\right) = \ln\left|\hat{G}_o\right| + j \arg(\hat{G}_o) \tag{28}$$

Reálná část

$$a_o = \ln\left|\hat{G}_o\right| \tag{29}$$

se nazývá ***obrazový útlum*** (konstanta tlumení),

imaginární část

$$b_o = \arg(\hat{G}_o) = \arg(\hat{U}_1 / \hat{U}_2) \tag{30}$$

se nazývá ***obrazový úhel přenosu*** (obrazová fáze, fázová konstanta).

Najděme vztah mezi prvky kaskádní matice a obrazovými parametry $\hat{Z}_o$ a $\hat{g}_o$. Z rovnic (27) a (26) platí:

$$\hat{G}_o = \exp(\hat{g}_o) = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}} \tag{31}$$

Z podmínky $\hat{A}_{11}^2 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = 1$ určíme, že $\left[a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\right]$

$$\hat{A}_{11}^2 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = (\hat{A}_{11} - \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}) \cdot (\hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}) = 1$$

tedy

$$(\hat{A}_{11} - \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}) = 1/(\hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}) = 1/\exp(\hat{g}_o) = \exp(-\hat{g}_o) = 1/\hat{G}_o \tag{32}$$

Ze součtu rovnic (31) a (32) určíme, že

$$2\hat{A}_{11} = \exp(\hat{g}_o) + \exp(-\hat{g}_o) = \hat{G}_o + 1/\hat{G}_o$$

tedy

$$\hat{A}_{11} = (\exp(\hat{g}_o) + \exp(-\hat{g}_o))/2 = \cosh(\hat{g}_o) \tag{33}$$

Z rozdílu rovnic (31) a (32) určíme, že

$$2 \cdot \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}} = \exp(\hat{g}_o) - \exp(-\hat{g}_o)$$

tedy

$$\sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}} = (\exp(\hat{g}_o) - \exp(-\hat{g}_o))/2 = \sinh(\hat{g}_o) \tag{34}$$

Z rovnice (20) dosadíme za $\hat{A}_{12} = \hat{Z}_o^2 \cdot \hat{A}_{21}$ do (34), po úpravě získáme vztah

$$\hat{A}_{21} = \frac{\sinh(\hat{g}_o)}{\hat{Z}_o} \tag{35}$$

Z rovnice (20) dosadíme $\hat{A}_{21} = \hat{A}_{12} / \hat{Z}_o^2$ do (34), po úpravě zjistíme, že

$$\hat{A}_{12} = \hat{Z}_o \sinh(\hat{g}_o) \tag{36}$$

Kaskádní matice reciprokého podélně souměrného dvojbranu (například i homogenního vedení) má potom ***vlnový tvar***

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} \cosh(\hat{g}_o) & \hat{Z}_o \sinh(\hat{g}_o) \\ \frac{1}{\hat{Z}_o}\sinh(\hat{g}_o) & \cosh(\hat{g}_o) \end{bmatrix} \tag{37}$$

Tento tvar je technicky velmi užitečný, protože můžeme určit obrazové parametry pouze z měření na vstupu kaskády (vedení).

Jistě platí

$$\hat{Z}_{vst1p} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21} = \hat{Z}_o / \mathrm{tgh}(\hat{g}_o) \tag{38}$$

$$\hat{Z}_{vst1k} = \hat{A}_{12} / \hat{A}_{22} = \hat{Z}_o \cdot \mathrm{tgh}(\hat{g}_o) \tag{39}$$

Snadno určíme, že - vztah (21) -

$$\hat{Z}_o = \sqrt{\hat{Z}_{vst1p} \cdot \hat{Z}_{vst1k}}$$

hodnoty $\hat{Z}_{vst1p}; \hat{Z}_{vst1k}$ můžeme relativně snadno změřit na vstupu kaskády při výstupu kaskády naprázdno a nakrátko.

Ještě musíme určit $\hat{g}_o$. Platí

$$\mathrm{tgh}(\hat{g}_o) = \frac{\sinh(\hat{g}_o)}{\cosh(\hat{g}_o)} = \frac{(\exp(\hat{g}_o) - \exp(-\hat{g}_o))/2}{(\exp(\hat{g}_o) + \exp(-\hat{g}_o))/2} = \frac{\exp(\hat{g}_o)}{\exp(\hat{g}_o)} \cdot \frac{1 - \exp(-2\hat{g}_o)}{1 + \exp(-2\hat{g}_o)}$$

Jednoduchou úpravou dospějeme ke vztahu

$$\exp(2\hat{g}_o) = \frac{1 + \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)}{1 - \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)} \tag{40}$$

Ze vztahů (38) a (39) určíme, že

$$\sqrt{\hat{Z}_{vst1k} / \hat{Z}_{vst1p}} = \mathrm{tgh}(\hat{g}_o) \tag{41}$$

Po dosazení do (40) a logaritmování tak určíme, že

$$\hat{g}_o = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\hat{Z}_{vst1k} / \hat{Z}_{vst1p}}}{1 - \sqrt{\hat{Z}_{vst1k} / \hat{Z}_{vst1p}}} \right) \tag{42}$$

I $\hat{g}_o$ lze určit pouze z měření na vstupu kaskády při výstupu kaskády nakrátko a naprázdno.

Snadno určíme, že při kaskádním řazení dvojbranů platí

$$\hat{G}_o = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_n} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \cdot \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_3} \cdot .... \cdot \frac{\hat{U}_{n-1}}{\hat{U}_n} = \hat{G}_{o1} \cdot \hat{G}_{o2} \cdot ...\hat{G}_{on} \qquad (43)$$

kde

$\hat{U}_1$ je napětí brány 1 dvojbranu 1

$\hat{U}_2$ je napětí brány 2 prvního dvojbranu a současně napětí brány 1 druhého dvojbranu

$\hat{U}_{n-1}$ je napětí brány 2 dvojbranu (n-1) a současně napětí brány 1 dvojbranu (n)

$\hat{U}_n$ je napětí brány 2 dvojbranu (n).

Pro obrazovou míru přenosu potom platí

$$\exp(\hat{g}_o) = \exp(\hat{g}_{o1}) \cdot \exp(\hat{g}_{o2}) \cdot ... \cdot \exp(\hat{g}_{on}) = \exp(\sum \hat{g}_{ok}) \qquad (44)$$

tedy

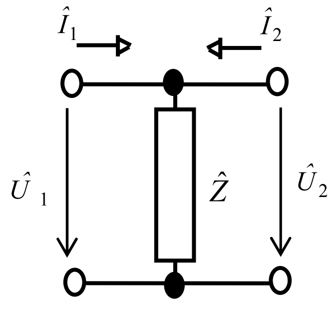
$$a_o = a_{o1} + a_{o2} + ... + a_{on} \qquad (45)$$

$$b_o = b_{o1} + b_{o2} + ... + b_{on} \qquad (46)$$

Výsledná obrazová míra přenosu je dána součtem jednotlivých obrazových měr přenosu, tedy i jejich složky (obrazový útlum a úhel přenosu) jsou dány součty vlastností jednotlivých dvojbranů.

4.4 Vybrané dvojbrany

Některé jednoduché dvojbrany jsou tzv. ***degenerované***. Není možné pro ně sestavit všechny maticové modely. Příkladem může být dvojbran na *obr.3*.



Obr. 3 *Příklad degenerovaného dvojbranu.*

Při $\hat{I}_2 = 0$ (výstup naprázdno) platí $\hat{U}_1 = \hat{Z} \cdot \hat{I}_1 = \hat{U}_2$.

Při $\hat{I}_1 = 0$ (vstup naprázdno) platí $\hat{U}_2 = \hat{Z} \cdot \hat{I}_2 = \hat{U}_1$.

Nyní již můžeme určit, že

$$\hat{Z}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} = \hat{Z}\,; \quad \hat{Z}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} = \hat{Z}\,; \quad \hat{Z}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} = \hat{Z}\,; \quad \hat{Z}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} = \hat{Z} \qquad (47)$$

Determinant takové matice je ovšem roven nule a proto není možné určit pro tento dvojbran admitanční matici - ***obsahovala by nekonečně velké prvky***. Ostatní matice ovšem existují (ověřte si jejich správnost):

$$\left[\hat{H}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & \hat{Y}\end{bmatrix};\qquad \left[\hat{K}\right]=\begin{bmatrix}\hat{Y} & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\qquad \left[\hat{A}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{Y} & 1\end{bmatrix};\qquad \left[\hat{B}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \hat{Y} & 1\end{bmatrix} \tag{48}$$

Ideální transformátor

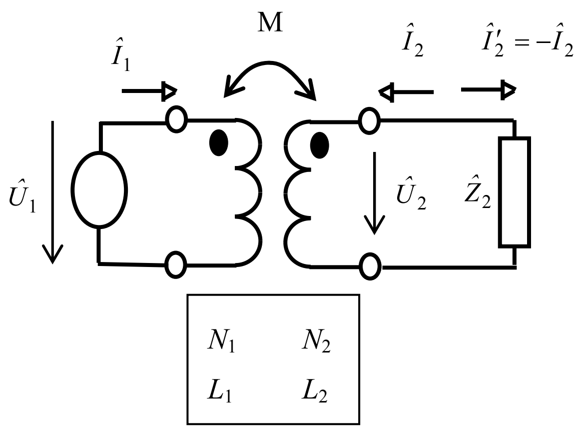
Ideální transformátor patří mezi degenerované dvojbrany. Odpory jeho vinutí jsou nulové - je bezeztrátový. Má dokonalou vazbu (k = 1) mezi ***primárním vinutím*** (primárem) a ***sekundárním vinutím*** (sekundárem). Proto je napětí "na jeden závit $\hat{U}_{1Z}$" stejné pro obě vinutí. Napětí primární $\hat{U}_1$ tak můžeme vyjádřit v podobě (N_1 počet závitů primáru)

$$\hat{U}_1 = N_1 \cdot \hat{U}_{1Z} \tag{49}$$

napětí sekundáru (N_2 počet závitů sekundáru)

$$\hat{U}_2 = N_{21} \cdot \hat{U}_{1Z} \tag{50}$$

Hodnoty indukčností L_1 a L_2 (a tedy i vzájemné indukčnosti $M = \sqrt{L_1 L_2}$) jsou nekonečně velké (funkce takového transformátoru nezávisí na frekvenci - pracuje i "s libovolnými okamžitými hodnotami signálu"). Jediným parametrem ideálního transformátoru je (obr. 4) jeho ***převodní poměr***



Obr. 4 *Ideální transformátor – dvojbranková konvence šipek*

$$n = \hat{U}_1 / \hat{U}_2 = -\hat{I}_2 / \hat{I}_1 = N_1 / N_2 \tag{51}$$

Příklad 1.

Přesvědčte se, že je transformátor definovaný vztahem (51) bezeztrátový.

Řešení:

Při spotřebičové konvenci platí pro komplexní výkon transformátoru

$$\hat{S} = \hat{U}_1\hat{I}_1^* + \hat{U}_2\hat{I}_2^* = \hat{U}_2\hat{I}_2^*\left(\frac{\hat{U}_1\hat{I}_1^*}{\hat{U}_2\hat{I}_2^*} + 1\right) = \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = n;\ \frac{\hat{I}_1^*}{\hat{I}_2^*} = -\left(-\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right)^* = -(1/n)^* = -1/n \right| =$$

$$= \hat{U}_2\hat{I}_2^*\left(n \cdot (-1/n) + 1\right) = 0$$

Jedná se o bezeztrátový dvojbran, protože $\mathrm{Re}\left[\hat{S}\right] = 0$.

■

Určeme ***vstupní impedanci transformátoru***, je-li zatížen impedancí $\hat{Z}_2$ - *obr.4*:

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{n\hat{U}_2}{-\hat{I}_2/n} = n^2\frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} = \left| \frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'} = \hat{Z}_2 \right| = n^2\hat{Z}_2 \tag{52}$$

Vstupní impedance má stejný charakter jako impedance na sekundáru transformátoru, mění se pouze modul impedance.

Někdy se v literatuře definuje převodní poměr transformátoru "naopak", tedy $m = N_2/N_1 = 1/n$. Potom zřejmě platí, že

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = n^2\hat{Z}_2 = \hat{Z}_2/m^2 \tag{53}$$

Údaje ze vztahu (51) můžeme jednoduchým způsobem rozepsat do "dvojbranových" systémů rovnic, např.:

$$\hat{U}_1 = n\hat{U}_2 = n\hat{U}_2 + 0 \cdot (-\hat{I}_2)$$

$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2/n = 0 \cdot \hat{U}_2 + (1/n) \cdot (-\hat{I}_2)$$

Tomu odpovídá kaskádní matice ideálního transformátoru

$$\left[\hat{A}\right]_{\mathrm{IT}} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix} \tag{54}$$

Analogicky určíme (ověřte si), že

$$\left[\hat{B}\right]_{\mathrm{IT}} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\left[\hat{H}\right]_{\mathrm{IT}} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\left[\hat{K}\right]_{\mathrm{IT}} = \begin{bmatrix} 0 & -1/n \\ 1/n & 0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

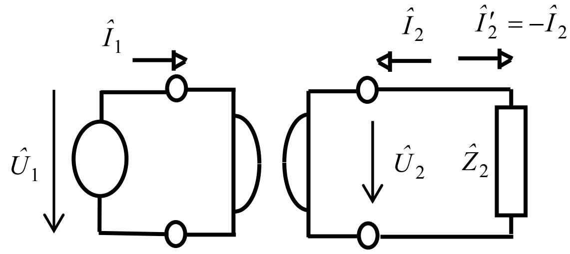
Matice impedanční a admitanční nelze sestavit (s konečnými prvky).

❑ Gyrátor

Schématická značka gyrátoru je na *obr.5*. Gyrátor je definován vztahy

$$\hat{I}_1 = g_1\hat{U}_2 \tag{58}$$

$$\hat{I}_2 = -\hat{I}_2' = -g_2\hat{U}_1 \tag{59}$$



Obr. 5 *Schématická značka gyrátoru s vyznačenou šipkovou konvencí.*

kde g_1, g_2 jsou ***gyrační vodivosti*** (reálná kladná čísla).

Nejčastěji se pracuje s ***bezeztrátovým gyrátorem***, kdy platí $g_1 = g_2 = g$ a tedy

$$\hat{I}_1 = g\hat{U}_2 \tag{58a}$$

$$\hat{I}_2 = -\hat{I}_2' = -g\hat{U}_1 \tag{59a}$$

Příklad 2.

Přesvědčte se, že gyrátor definovaný vztahy (58a) a (59a) je bezeztrátový.

Řešení:

Komplexní výkon gyrátoru $[\hat{U}_1 = U_1 \cdot \exp(j\varphi_{U1})$; $\hat{I}_1 = I_1 \cdot \exp(j\varphi_{I1})$; $\hat{U}_2 = U_2 \cdot \exp(j\varphi_{U2})$; $\hat{I}_2 = I_2 \cdot \exp(j\varphi_{I2})\,]$ je

$$\hat{S} = \hat{U}_1\hat{I}_1^* + \hat{U}_2\hat{I}_2^* = \left(\frac{-\hat{I}_2}{g}\right)\cdot\left(g\hat{U}_2\right)^* + \hat{U}_2\hat{I}_2^* = \hat{U}_2\hat{I}_2^* - \hat{U}_2^*\hat{I}_2 =$$

$$= U_2 \cdot \exp(j\varphi_{U2}) \cdot I_2 \cdot \exp(-j\varphi_{I2}) - U_2 \cdot \exp(-j\varphi_{U2}) \cdot I_2 \cdot \exp(j\varphi_{I2}) =$$

$$= U_2 I_2 \left[\exp(j(\varphi_{U2} - \varphi_{I2})) - \exp(-j(\varphi_{U2} - \varphi_{I2}))\right] = 2jU_2I_2 \sin(\varphi_{U2} - \varphi_{I2})$$

Reálná složka komplexního výkonu je rovna nule, obvod je bezeztrátový.

■

Určeme ***vstupní impedanci gyrátoru*** zatíženého impedancí $\hat{Z}_2$ - *obr. 5*. Platí

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{-\hat{I}_2/g_2}{g_1\hat{U}_2} = \frac{1}{g_1g_2}\cdot\frac{1}{-\hat{U}_2/\hat{I}_2} = \left|\frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'} = \hat{Z}_2\right| = 1/(g_1g_2\hat{Z}_2) \tag{60}$$

Pro $g_1 = g_2 = g$ potom

$$\hat{Z}_1 = 1/(g^2 \hat{Z}_2) = r^2 / \hat{Z}_2 \tag{60a}$$

kde $r = 1/g$ je ***gyrační odpor***.

Dochází k inverzi impedance $\hat{Z}_2$ - gyrátor patří do skupiny impedančních invertorů (pozitivních).

Významným případem je zapojení kapacitoru na výstup gyrátoru, $\hat{Z}_2 = 1/(j\omega C)$. Potom podle vztah (60a) obdržíme

$$\hat{Z}_1 = j\omega r^2 C$$

Vstup gyrátoru se chová za této situace ***jako induktor*** (syntetický induktor), jehož ekvivalentní hodnota je

$$\boxed{L_e = r^2 C} \tag{61}$$

Tohoto jevu se využívá při konstrukci aktivních filtrů, které obsahují pouze rezistory, kapacitory a zesilovací prvky - tzv. filtry ARC.

Rovnice (58a) a (59a) můžeme upravovat analogicky jako u ideálního transformátoru, např.:

$$\hat{U}_1 = 0 \cdot \hat{I}_1 + (-1/g)\hat{I}_2 = 0 \cdot \hat{I}_1 + (-r)\hat{I}_2$$

$$\hat{U}_2 = (1/g)\hat{I}_1 + 0 \cdot \hat{I}_2 = r\hat{I}_1 + 0 \cdot \hat{I}_2$$

Tomuto zápisu odpovídá **impedanční model gyrátoru**

$$\left[\hat{Z}\right]_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Analogicky získáme modely

$$\left[\hat{Y}\right]_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[\hat{A}\right]_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ g & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[\hat{B}\right]_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0 & -r \\ -g & 0 \end{bmatrix} \tag{63}$$

Matice smíšené nelze pro gyrátor sestavit.

❑ Aktivní dvojbrany

V teorii obvodů jsou základními zdroji energie zdroj napětí a zdroj proudu. Řídicími veličinami jsou rovněž napětí a proud. To poskytuje ***čtyři různé kombinace ideálních řízených zdrojů*** - ty popisují všechny "elektrické" možnosti.

Zdroj napětí řízený napětím - obr.6a - vhodným popisem je vztah

$$\hat{U}_2 = \hat{K}_{21} \hat{U}_1 \tag{64}$$

a tomu odpovídající matice

$$\left[\hat{K}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{K}_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

V technické praxi se označuje spíše jako ***ideální zesilovač napětí*** a parametr $\hat{K}_{21}$ (bez rozměru) se nazývá ***napěťové zesílení***.

Zdroj napětí řízený proudem - obr.6b - vhodným popisem je vztah

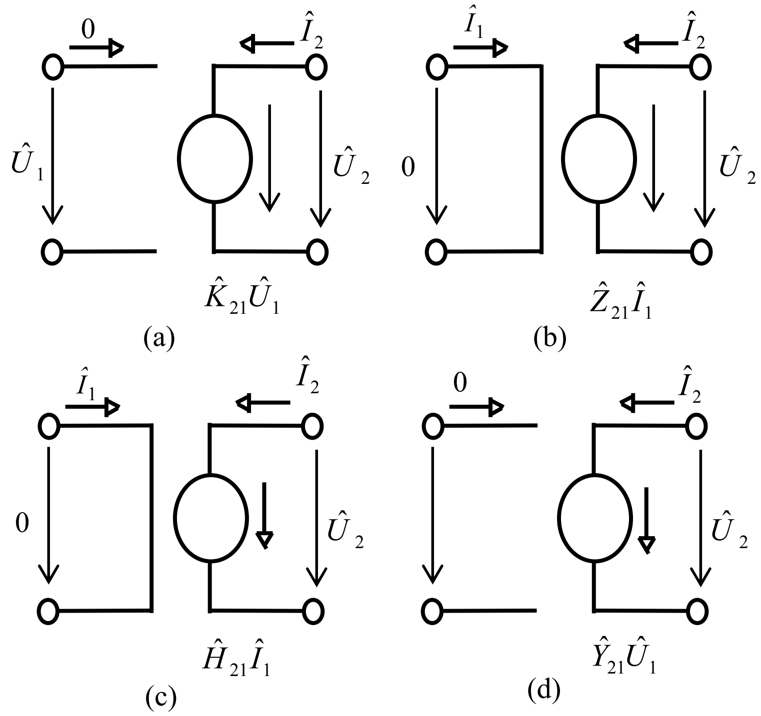
$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 \tag{66}$$

kterému přísluší maticový model

$$\left[\hat{Z}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{Z}_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{67}$$

V technické praxi se často označuje jako ***převodník proudu na napětí*** nebo také jako ***transimpedanční zesilovač*** ($\hat{Z}_{21}$ - přenosová impedance - transimpedance, rozměr Ω).

Zdroj proudu řízený proudem - obr.6c - je definován vztahy



Obr. 6 *Ideální zdroj a) napětí řízený napětím, b) napětí řízený proudem, c) proudu řízený proudem, d) proudu řízený napětím.*

$$\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 \tag{68}$$

$$\left[\hat{H}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H}_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

V technické praxi se nazývá ***proudový zesilovač*** (ideální), $\hat{H}_{21}$ je proudový zesilovací činitel (proudové zesílení, bez rozměru).

Zdroj proudu řízený napětím - obr. 6d - je definován vztahy

$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 \tag{70}$$

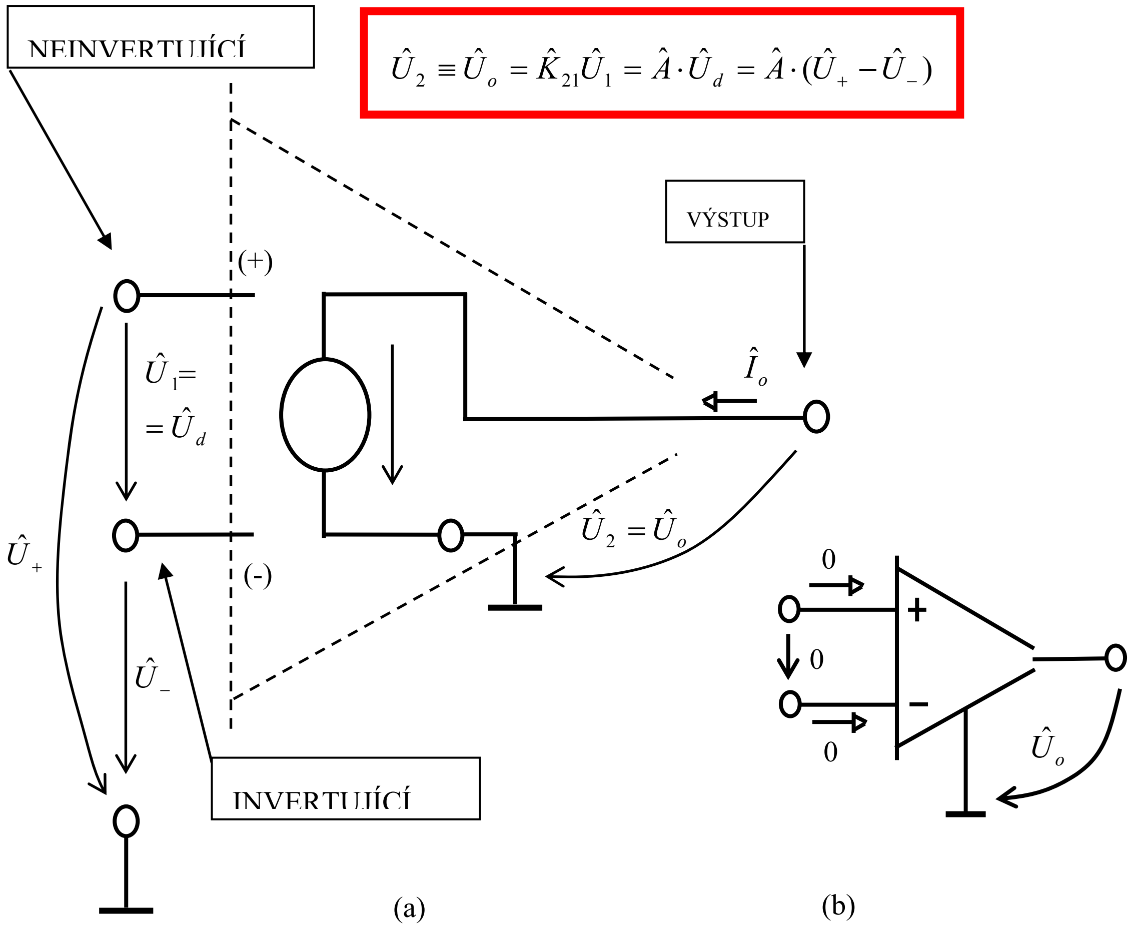
$$\left[\hat{Y}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{Y}_{21} & 0 \end{bmatrix} \tag{71}$$

V technické praxi se označuje jako ***převodník napětí na proud*** nebo také ***transadmitanční zesilovač*** ($\hat{Y}_{21}$ - přenosová admitance, strmost, rozměrem je S).

Za povšimnutí stojí skutečnost, že ***výkon pro řízení ideálních zdrojů je*** ve všech případech ***nulový***; součin $\hat{U}_1\hat{I}_1^* = 0$. Obecný model reálných zdrojů je obdobný situaci na *obr. 2*. Pro řízení je vždy současně zapotřebí napětí i proud, je nutný jistý řídicí výkon.

4.5 Operační zesilovač

Operační zesilovač je dnes v analogové elektronice nejrozšířenějším funkčním blokem, pomocí kterého se realizují všechny možné požadavky konstruktérů. Z dvojbranového pohledu patří mezi zdroje napětí řízené napětím. Jeho nejběžnější diferenční uspořádání je na obr.7. Výstupní napětí je nejčastěji vztaženo vůči referenčnímu uzlu (zemi).



Obr. *7 a) Znázornění diferenčního operačního zesilovače jako dvojbranu* $(\hat{U}_1 = \hat{U}_d = (\hat{U}_+ - \hat{U}_-);\ \hat{K}_{21} = \hat{A};\ \hat{U}_2 = \hat{U}_o\ )$*; b) symbolická značka operačního zesilovače a poměry na vstupu pro ideální operační zesilovač (pro libovolné výstupní napětí) - zemnicí vývod v b) se většinou nekreslí.*

Jedná se o zdroj napětí řízený napětím, proto ***proudy*** do řídících ***vstupů jsou nulové*** (diferenční odpor mezi neinvertujícím vstupem (+) a invertujícím vstupem (-) je nekonečně velký). Pro ***ideální operační zesilovač*** musí dále platit, že ***napěťové zesílení nabývá nekonečné hodnoty***, tedy

$$\hat{U}_d \equiv \hat{U}_1 = \hat{U}_o / \hat{K}_{21} \equiv \hat{U}_o / \hat{A} \to 0 \tag{72}$$

Pro libovolné výstupní napětí a libovolný výstupní proud je diferenční napětí na vstupu ideálního operačního zesilovače rovno nule:

$$\hat{U}_d = \hat{U}_+ - \hat{U}_- = 0 \tag{73}$$

To je možné přepsat i do podoby

$$\hat{U}_+ = \hat{U}_- \tag{74}$$

Napětí na invertujícím vstupu a neinvertujícím vstupu ideálního operačního zesilovače jsou stále stejná. Někdy proto hovoříme o ***virtuálním zkratu*** (propojení) - virtuální proto, že diferenční napětí je sice nulové, ale nevtéká žádný proud (do vstupů zesilovače).

Ideální operační zesilovač lze proto s výhodou definovat pomocí dvou jednoduchých pravidel:

Pro libovolné výstupní napětí $\hat{U}_o$ a libovolné zatížení výstupu platí:

PRAVIDLO 1: DIFERENČNÍ NAPĚTÍ JE ROVNO NULE ($\hat{U}_d = 0$; $\hat{U}_+ = \hat{U}_-$) (P1)

PRAVIDLO 2: PROUDY DO VSTUPŮ JSOU ROVNY NULE. (P2)

Tato dvě pravidla velmi zjednodušují řešení obvodů s ideálními operačními zesilovači.

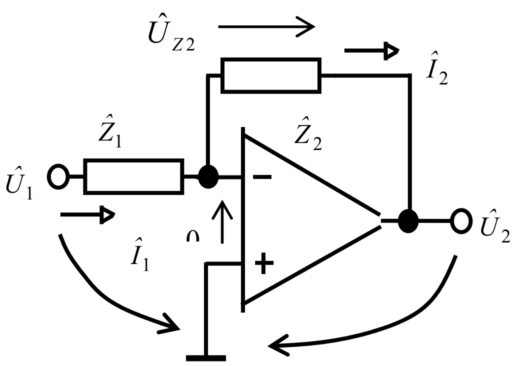
❑ Invertující zesilovač s ideálním operačním zesilovačem (IOZ)

Na *obr. 8* je invertující zesilovač s IOZ. Na invertujícím vstupu je tzv. ***virtuální zem*** (**P1**: $\hat{U}_+ = \hat{U}_- = 0$). Proto snadno určíme, že $\hat{I}_1 = (\hat{U}_1 - 0)/\hat{Z}_1$. Do invertujícího vstupu nevtéká proud (**P2**), proto $\hat{I}_2 = \hat{I}_1 = \hat{U}_1 / \hat{Z}_1$ (1. Kirchhoffův zákon). Ve smyslu 2. Kirchhoffova zákona musí platit

$$\hat{U}_2 + 0 + \hat{U}_{Z2} = \hat{U}_2 + \hat{I}_2 \hat{Z}_2 = \hat{U}_2 + (\hat{U}_1 / \hat{Z}_1) \cdot \hat{Z}_2 = 0$$

tedy napěťový přenos

$$\hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1 = -\hat{Z}_2 / \hat{Z}_1 \tag{75}$$



Obr. 8 *Invertující zesilovač s IOZ*

Pro obvykle uváděnou volbu $\hat{Z}_1 = R_1$ a $\hat{Z}_2 = R_2$ tak dospějeme k nejběžněji uváděné podobě přenosu invertujícího zapojení ideálního operačního zesilovače, $\hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1 = -R_2 / R_1$, vstupní a výstupní napětí mají opačnou fázi, ***struktura je invertující***.

Vstupní impedance

$$\hat{Z}_{vst} = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = \hat{U}_1 / (\hat{U}_1 / \hat{Z}_1) = \hat{Z}_1$$

výstupní impedance je u ideálního zdroje napětí vždy nulová.

Vhodnou volbou impedancí $\hat{Z}_1$ a $\hat{Z}_2$ (složeny z pasívních prvků) můžeme realizovat různé frekvenčně závislé přenosy - podle konkrétních požadavků (například filtry).

❑ Neinvertující zesilovač s IOZ

Platí $\hat{U}_+ = \hat{U}_1 = \hat{U}_-$ (pravidlo 1), dále jistě musí platit $\hat{U}_- = \hat{U}_2 \hat{Z}_1 / (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)$ - do vstupu (-) totiž nevtéká proud - pravidlo 2 - impedanční dělič není zatížený. Podle pravidla 1 tedy musí platit

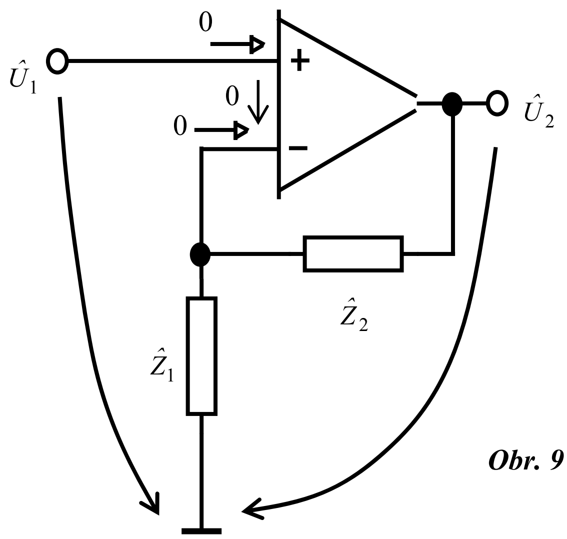
$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \hat{Z}_1 / (\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)$$

tedy i

$$\hat{P}_U = \hat{U}_2 / \hat{U}_1 = 1 + \hat{Z}_2 / \hat{Z}_1 \qquad (76)$$

Při nejběžnější volbě $\hat{Z}_1 = R_1$ a $\hat{Z}_2 = R_2$ obdržíme pro zesílení vztah $\hat{P}_U = 1 + R_2 / R_1$, vstupní a výstupní napětí jsou ve fázi, ***struktura je neinvertující***.

Neinvertující zesilovací struktura s IOZ je na *obr.9*.



Obr. 9 *Neinvertující zesilovač s IOZ*

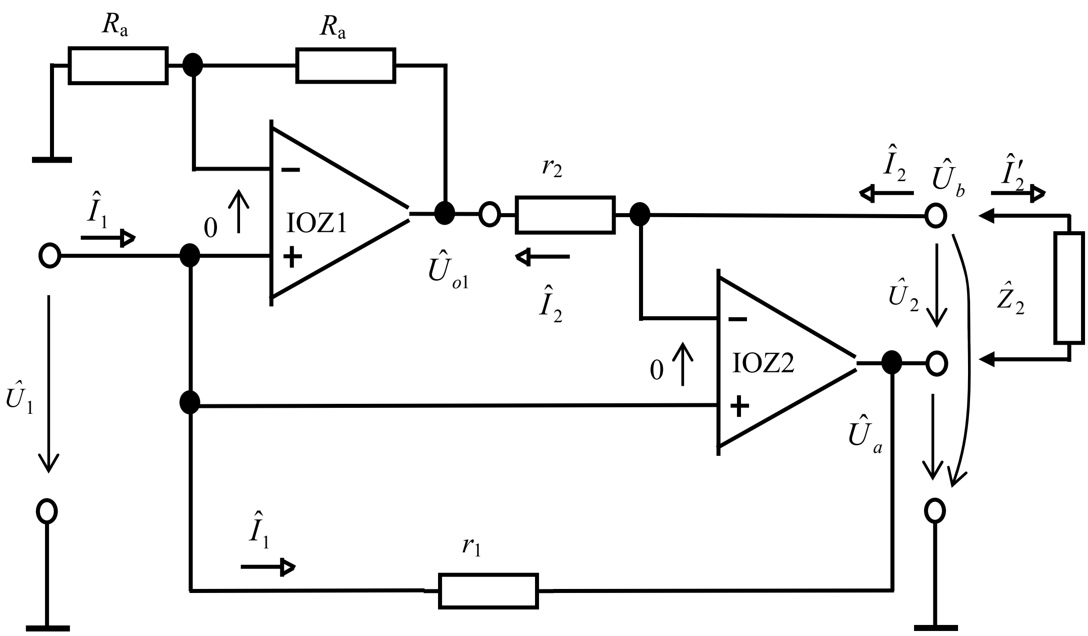
Vstupní impedance je v daném případě

$$\hat{Z}_{vst} = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = \hat{U}_1 / 0 \rightarrow \infty$$

výstupní impedance je rovna nule.

Gyrátor se dvěma IOZ

Zapojení na *obr. 10*, se dvěma ideálními operačními zesilovači, se chová jako gyrátor.



Obr. 10 *Zapojení gyrátoru se dvěma ideálními operačními zesilovači.*

IOZ1 je zapojen jako neinvertující zesilovač s napěťovým zesílením (přenosem) $1+R_a/R_a=2$ (viz *obr. 9*), tedy vždy bude platit, že

$$\hat{U}_{o1} = 2 \cdot \hat{U}_1 \tag{77}$$

Dále je zřejmé (pravidlo 1), že

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_b \tag{78}$$

napětí mezi vstupy IOZ2 musí být rovno nule. Z pravidla 2 plyne, že proud odporem r_1 je přímo roven proudu $\hat{I}_1$ a proud odporem r_2 je roven proudu $\hat{I}_2$.

Z 2. Kirchhoffova zákona a vztahu (78) určíme, že

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_b = \hat{U}_{o1} + r_2\hat{I}_2 = 2 \cdot \hat{U}_1 + r_2\hat{I}_2$$

tedy

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_b = -r_2\hat{I}_2 \tag{79}$$

Z 2. Kirchhoffova zákona rovněž platí, že

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_a + r_1\hat{I}_1$$

tedy

$$\hat{U}_a = \hat{U}_1 - r_1\hat{I}_1 \tag{80}$$

Nyní můžeme určit, že

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_b - \hat{U}_a = \hat{U}_1 - (\hat{U}_1 - r_1\hat{I}_1) = r_1\hat{I}_1 \tag{81}$$

Rovnice (79) a (81) opravdu definují impedanční matici gyrátoru

$$\left[\hat{Z}\right]_G = \begin{bmatrix} 0 & -r_2 \\ r_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

a impedance $\hat{Z}_2$ je skutečně invertována na vstup jako

$$\hat{Z}_1 = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = r_1 r_2 / \hat{Z}_2$$

Výpočet můžeme udělat i bez dvojbranové konvence, přímo s "využitím" $\hat{Z}_2$. Jak již bylo uvedeno, platí vztah (77), tedy $\hat{U}_{o1} = 2 \cdot \hat{U}_1$. Operační zesilovač IOZ2 má k výstupu $\hat{U}_a$ dvě zesilující cesty. Invertující cestu se zesílením $-\hat{Z}_2 / r_2$ (vůči $\hat{U}_{o1}$) a neinvertující cestu se zesílením $1 + \hat{Z}_2 / r_2$ (vůči $\hat{U}_1$). Pomocí principu superpozice (oba zesilovače musí stále pracovat v lineárním režimu) určíme, že

$$\hat{U}_a = (-\hat{Z}_2 / r_2)\hat{U}_{o1} + (1 + \hat{Z}_2 / r_2)\hat{U}_1 = (-\hat{Z}_2 / r_2) \cdot 2 \cdot \hat{U}_1 + (1 + \hat{Z}_2 / r_2)\hat{U}_1 = (1 - \hat{Z}_2 / r_2)\hat{U}_1 \tag{83}$$

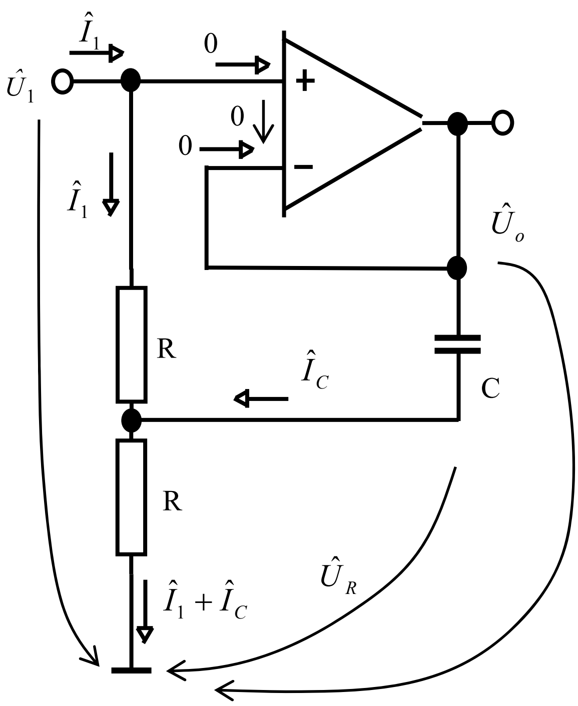
Nyní je již možné určit vstupní proud $\hat{I}_1 = (\hat{U}_1 - \hat{U}_a) / r_1 = \hat{U}_1 \hat{Z}_2 / (r_1 r_2)$. Pro vstupní impedanci tak opět dostáváme

$$\hat{Z}_1 = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = r_1 r_2 / \hat{Z}_2$$

Zapojení na *obr.10* opravdu realizuje ideální gyrátor.

Příklad 3.

Ověřte, že obvod na obr. 11 se chová jako neideální gyrátor, který realizuje vstupní impedanci $\hat{Z}_1 = 2R + j\omega R^2 C$.



Obr. 11 *Základní zapojení neideálního gyrátoru s ekvivalentní indukčností* $L_e = CR^2$ *a sériovým odporem* $R_S = 2R$.

Řešení

a): Vyjdeme ze základních úvah. Proud $\hat{I}_1$ vtéká celý do rezistoru R (pravidlo 2), dále jistě platí, že $\hat{U}_o = \hat{U}_1$ (pravidlo 1, IOZ je zapojen jako ***sledovač napětí***). Zřejmě platí, že proud kapacitorem je $\hat{I}_C = \dfrac{\hat{U}_o - \hat{U}_R}{1/(j\omega C)} = \left|\hat{U}_R = R(\hat{I}_1 + \hat{I}_C)\right| = j\omega C\left[\hat{U}_1 - R(\hat{I}_1 + \hat{I}_C)\right]$. Odsud již určíme, že $\hat{I}_C = \dfrac{j\omega C(\hat{U}_1 - R\hat{I}_1)}{1 + j\omega CR}$. Také musí platit, že $\hat{U}_1 = R\hat{I}_1 + R(\hat{I}_1 + \hat{I}_C)$. Po dosazení za $\hat{I}_C$ a úpravách dostaneme vztah $\hat{U}_1 = 2R\hat{I}_1 + j\omega CR^2\hat{I}_1$, odkud snadno určíme, že vstupní impedance je $\hat{Z}_1 = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = 2R + j\omega CR^2$.

b): Zvolíme dvojbranový přístup. Situace je vhodně překreslena na *obr. 12*.

Z pravidla 1 je zřejmé, že napětí $\hat{U}_{Ra}$ na rezistoru R_a je shodné s napětím $\hat{U}_2$ a také to, že $\hat{U}_o = \hat{U}_1$. Z pravidla 2 je zřejmé, že proud $\hat{I}_1$ protéká celý rezistorem R_a. Platí tedy vždy

$$\hat{U}_{Ra} = R_a\hat{I}_1 = \hat{U}_2 .$$

Při $\hat{I}_2 = 0$ (vnucujeme proud $\hat{I}_1$, $\hat{I}_{Rb} = \hat{I}_1$) potom můžeme určit přímo, že $\hat{U}_2 = R_a\hat{I}_1$ a $\hat{U}_1 = (R_a + R_b)\hat{I}_1$ a platí proto $\hat{Z}_{11} = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = R_a + R_b$ a $\hat{Z}_{21} = \hat{U}_2 / \hat{I}_1 = R_a$.

Při $\hat{I}_1 = 0$ (vnucujeme proud $\hat{I}_2, \hat{I}_{Rb} = -\hat{I}_2$) je $\hat{U}_2 = R_a\hat{I}_1 = 0$ a $\hat{U}_1 = R_b\hat{I}_{Rb} = -R_b\hat{I}_2$. Můžeme určit, že $\hat{Z}_{12} = \hat{U}_1 / \hat{I}_2 = -R_b$ a $\hat{Z}_{22} = \hat{U}_2 / \hat{I}_2 = 0$. Obvod je popsán impedančním modelem:

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2 = (R_a + R_b)\hat{I}_1 - R_b\hat{I}_2$$

$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2 = R_a\hat{I}_1 + 0\cdot\hat{I}_2$$

Při dané konvenci opět platí, že $\hat{Z}_2 = \hat{U}_2 / \hat{I}_2' = -\hat{U}_2 / \hat{I}_2$. Můžeme proto určit, že

$$\hat{U}_1 = (R_a + R_b)\hat{I}_1 - R_b\hat{I}_2 = (R_a + R_b)\hat{I}_1 - R_b(-\hat{U}_2 / \hat{Z}_2) = \left|R_a\hat{I}_1 = \hat{U}_2\right| =$$
$$= (R_a + R_b)\hat{I}_1 + R_aR_b\hat{I}_1 / \hat{Z}_2$$

a vstupní impedance

$$\hat{Z}_1 = \hat{U}_1 / \hat{I}_1 = (R_a + R_b) + R_aR_b / \hat{Z}_2 = \left|R_a = R_b = R\right| = 2R + R^2 / \hat{Z}_2 =$$
$$= \left|\hat{Z}_2 = 1/(j\omega C)\right| = 2R + j\omega R^2 C$$

Obvod na *obr.11* se chová jako ***neideální gyrátor***. Neideálnost spočívá v tom, že na hlavní diagonále impedanční matice je nenulový prvek ($2R$). V důsledku toho je do série s ekvivalentní indukčností R^2C zařazen i odpor $2R$. ***Impedanční matice neideálního gyrátoru*** je tedy

$$\left[\hat{Z}\right]_{\mathrm{NG}} = \begin{bmatrix} 2R & -R \\ R & 0 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Jednoduchými úpravami zjistíme, že tomu odpovídá admitanční matice

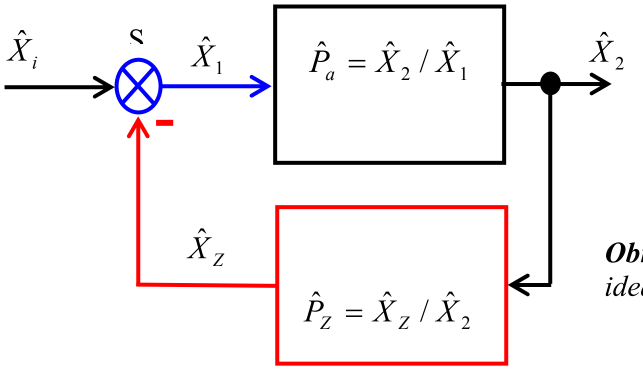
$$\left[\hat{Y}\right]_{\mathrm{NG}} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 2/G \end{bmatrix} \tag{85}$$

■

4.6 Zpětná vazba

Dvojbranový přístup je vhodný pro popis ***obvodů se zpětnou vazbou***. Základním obvodem (dvojbranem) je některý z řízených zdrojů, signál je (ideálně) přenášen pouze jedním směrem - ze vstupu na výstup (***přímá větev***). Druhý dvojbran (***zpětnovazební větev***) přenáší signál z výstupu (přímé větve) na vstup (přímé větve). I ve zpětné větvi uvažujeme ideálně pouze přenos signálu jedním směrem - obě větve jsou tedy ***unilaterální***.

Zcela obecné blokové (skupinové) schéma takového zpětnovazebního obvodu je na *obr.13*.



Obr. 13 *Obecné blokové schema ideální zpětnovazební struktury.*

$\hat{P}_a = \hat{X}_2 / \hat{X}_1$ definuje přenos přímé větve

$\hat{P}_Z = \hat{X}_Z / \hat{X}_2$ definuje přenos zpětnovazební větve

blok S definuje způsob slučování zpětnovazebního ($\hat{X}_Z$) a vstupního ($\hat{X}_i$) signálu.

Zde vyznačeno znaménko (-), proto platí

$$\hat{X}_1 = \hat{X}_i - \hat{X}_Z \tag{86}$$

Snadno určíme, že

$$\hat{X}_2 = \hat{P}_a \hat{X}_1 = \hat{P}_a(\hat{X}_i - \hat{X}_Z) = \hat{P}_a(\hat{X}_i - \hat{P}_Z \hat{X}_2)$$

tedy i

$$\hat{X}_2(1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) = \hat{P}_a \hat{X}_i$$

Po úpravě obdržíme pro celkový ***přenos struktury se zpětnou vazbou*** vztah

$$\hat{P} = \hat{X}_2 / \hat{X}_i = \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{87}$$

Člen ve jmenovateli vztahu (87)

$$\hat{D} = 1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z \tag{88}$$

se nazývá jako činitel zpětné vazby.

Jestliže platí, že $\left|\hat{P}\right| = \left|\dfrac{\hat{P}_a}{\hat{D}}\right| = \left|\hat{P}_a\right| \Big/ \left|\hat{D}\right| \le \left|\hat{P}_a\right|$

tedy

$$\left|\hat{D}\right| \ge 1 \tag{89}$$

hovoříme o **záporné zpětné vazbě** (degenerativní) - **záporná zpětná vazba působí "proti" stavu bez zpětné vazby**.

Jestliže platí, že $\left|\hat{P}\right| = \left|\hat{P}_a\right| \Big/ \left|\hat{D}\right| \ge \left|\hat{P}_a\right|$

tedy

$$\left|\hat{D}\right| \le 1 \tag{90}$$

hovoříme o ***kladné zpětné vazbě*** (regenerativní) - ***kladná zpětná vazba "podporuje" zesílení*** struktury (proti stavu bez vazby).

V praxi jsou oba přenosy (přímý i zpětnovazební) funkcí frekvence. Na některých frekvencích tak může nastat **kritická situace**, kdy právě platí

$$\hat{D} = 1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z \to 0 \tag{91}$$

Přenos se zpětnou vazbou je zde teoreticky nekonečně veliký. Prakticky se však vždy ustálí na nějaké konečné hodnotě (díky nelinearitám reálných obvodů) - v obvodu ***vznikají samovolné oscilace*** (**1. chtěné** = žádoucí - **v případě oscilátorů**; **2. nežádoucí** - u zesilovačů a filtrů - hovoříme o **nestabilitě**). Nebo se struktura chová jako **klopný obvod**, pokud je podmínka (91) splněna v širokém pásmu frekvencí.

Přepišme si vztah (87) do oboru reálných čísel

$$P = P_a /(1 + P_a P_Z) \tag{92}$$

Tento vztah má obecný význam. Platí-li, že $P_a P_Z \to \infty$, ***je (ideální) přenos***

$$P_{ID} = \lim_{P_a P_Z \to \infty} \left[P_a /(1 + P_a P_Z)\right] = 1/P_Z \tag{93}$$

určen pouze vlastnostmi zpětnovazebního obvodu, nikoliv řízeným zdrojem (zesilovačem).

Tato skutečnost je v technické praxi významná, protože zpětnovazební větev můžeme konstruovat (navrhovat) tak, aby zaručovala požadovaný frekvenční průběh přenosu (zesilovače, frekvenční filtry, korektory).

Vliv změny přenosu přímé větve lze získat derivací vztahu (92) podle P_a:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}P_a} = \frac{1 \cdot (1 + P_a P_Z) - P_a P_Z}{(1 + P_a P_Z)^2} = \frac{1}{(1 + P_a P_Z)^2} \tag{94}$$

Tato derivace se normuje, zavádí se pojem ***normovaná diferenciální citlivost***

$$S_{dn}(P_a) = \frac{\mathrm{d}P / P}{\mathrm{d}P_a / P_a} = \frac{P_a}{P} \cdot \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}P_a} = \frac{P_a}{P_a /(1 + P_a P_Z)} \cdot \frac{1}{(1 + P_a P_Z)^2} = \frac{1}{1 + P_a P_Z} \tag{95}$$

Velký činitel zpětné vazby vede ke zmenšení vlivu změny přenosu P_a na celkový přenos. Pro ideální operační zesilovač je $P_a \to \infty$ a $S_{dn}(P_a) \to 0$.

❑ Vliv zpětné vazby na frekvenční vlastnosti přenosu

Vliv zpětné vazby na frekvenční vlastnosti přenosu lze určit z obecného vztahu (87). Předpokládejme pro jednoduchost, že zpětnovazební přenos je popsán pouze reálným číslem, je frekvenčně nezávislý. Potom platí pro celkový přenos struktury

$$\hat{P} = \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a P_Z) \tag{96}$$

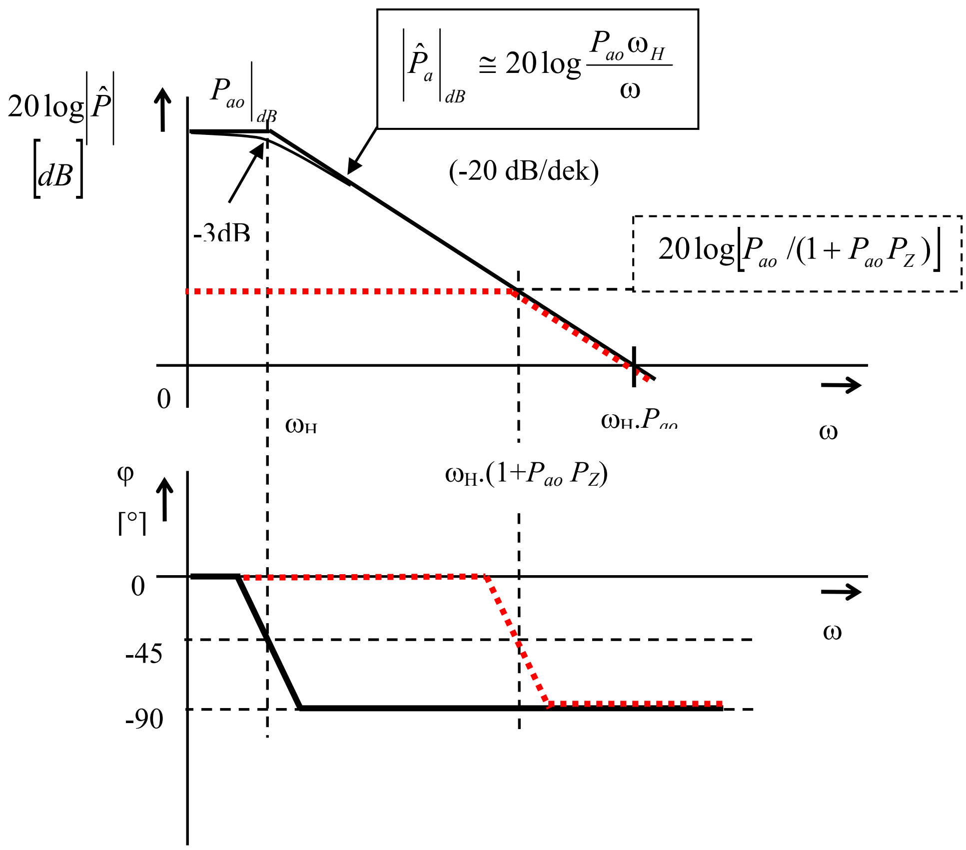
Horní kmitočet přenosu P_a

Předpokládejme, že přenos přímé větve $\hat{P}_a$ je popsán vztahem

$$\hat{P}_a = P_{ao} \cdot \frac{\omega_H}{j\omega + \omega_H} = P_{ao} \cdot \frac{1}{1 + j\omega / \omega_H} \tag{97}$$

(tento popis vyhovuje i u operačních zesilovačů, v katalozích se uvádí $P_{ao} = A_o$; $\omega_H = \omega_1$;

$A_o.\omega_1 = \omega_T$ - extrapolovaný tranzitní kmitočet operačního zesilovače). Vztahu (97) odpovídají Bodeho asymptoty na *obr. 14* - plné čáry.



Obr. 14 *Modulová a fázová charakteristika funkce dané vztahem (97) - plné čáry; vliv zpětné vazby - přerušované čáry.*

Dosaďme nyní ze vztahu (97) do vztahu (96)

$$\hat{P} = \frac{P_{ao} \cdot \dfrac{\omega_H}{j\omega + \omega_H}}{1 + P_Z P_{ao} \cdot \dfrac{\omega_H}{j\omega + \omega_H}} = \ldots = \frac{P_{ao}}{1 + P_Z P_{ao}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{\omega_H (1 + P_Z P_{ao})}} \tag{98}$$

Přenos pro nízké kmitočty je tak definován vztahem $P_{ao} / (1 + P_Z P_{ao})$. K poklesu přenosu o 3 dB pod tuto hodnotu dochází na frekvenci ω_{HZ}, kde právě platí

$$\frac{\omega_{HZ}}{\omega_H (1 + P_Z P_{ao})} = 1$$

tedy

$$\omega_{HZ} = \omega_H (1 + P_Z P_{ao}) \tag{99}$$

viz *obr. 14* - přerušované čáry.

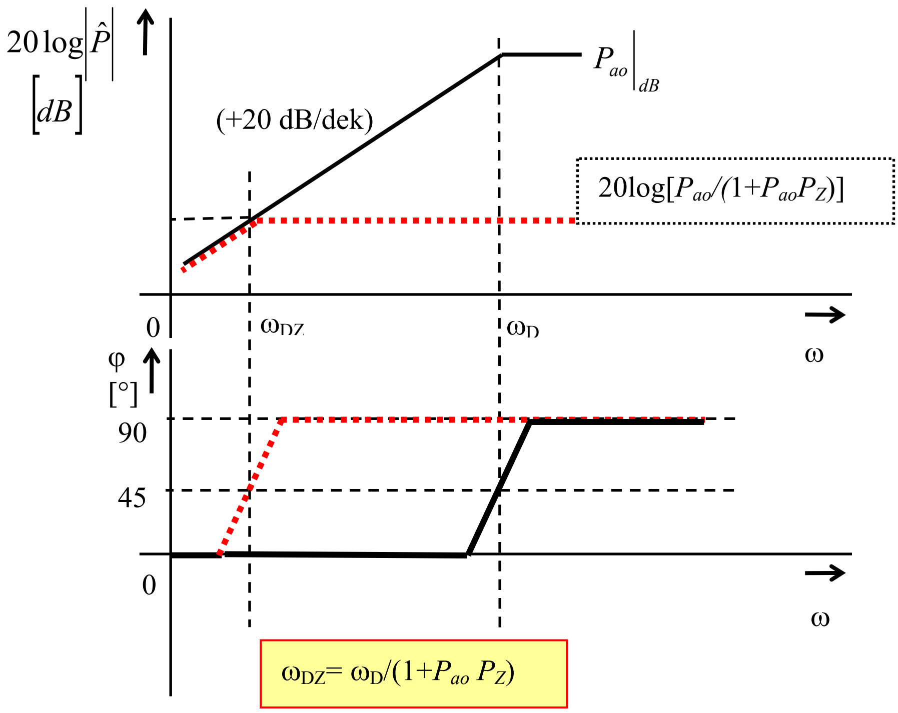
Záporná zpětná vazba, kdy $1 + P_Z P_{ao} > 1$, tedy frekvenční pásmo rozšiřuje, ovšem za cenu poklesu zesílení (proti stavu bez vazby).

Dolní kmitočet přenosu P_a

Nyní předpokládejme, že přenos přímé větve je modelován vztahem

$$\hat{P}_a = P_{ao} \cdot \frac{j\omega}{j\omega + \omega_D} = P_{ao} \cdot \frac{j\omega / \omega_D}{1 + j\omega / \omega_D} \tag{100}$$

Odpovídající charakteristiky jsou na *obr.15* (asymptoty) - plné čáry.



Obr. 15 *Modulová a fázová charakteristika funkce dané vztahem (100) - plné čáry; vliv zpětné vazby - přerušované čáry.*

Dosaďme do vztahu (96) ze vztahu (100) a upravme:

$$\hat{P} = \frac{P_{ao} \cdot \dfrac{j\omega/\omega_D}{1+j\omega/\omega_D}}{1+P_Z P_{ao} \cdot \dfrac{j\omega/\omega_D}{1+j\omega/\omega_D}} = \ldots = \frac{P_{ao}}{1+P_Z P_{ao}} \cdot \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_D/(1+P_Z P_{ao})}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_D/(1+P_Z P_{ao})}} \qquad (101)$$

Dolní frekvence se zpětnou vazbou je zřejmě určena vztahem,

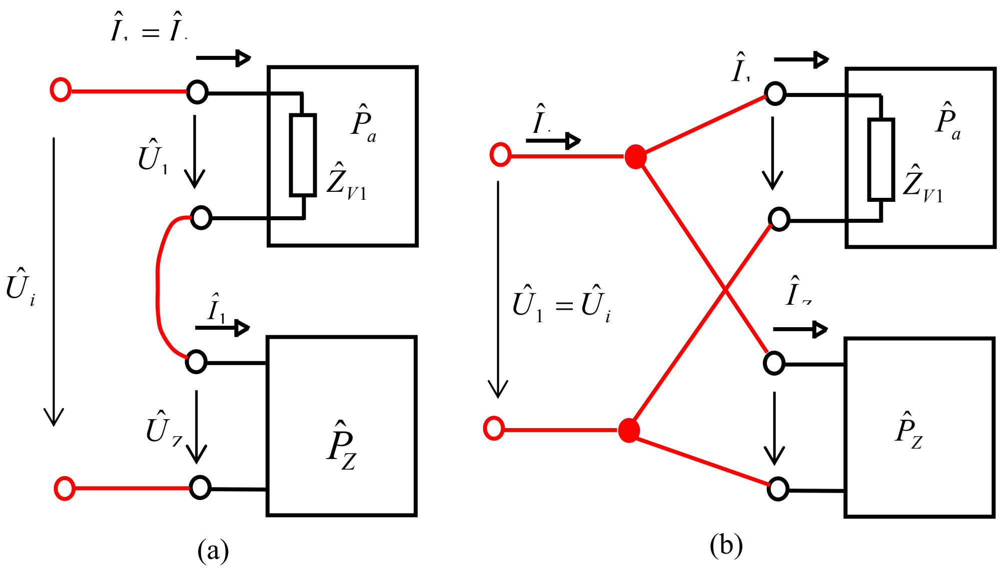
$$\omega_{DZ} = \omega_D/(1+P_Z P_{ao}) \qquad (3.102)$$

kde je přenos opět 3 dB pod hodnotou $P_{ao}/(1+P_Z P_{ao})$ - viz *obr. 15* - přerušovaná čára.

I pro dolní kmitočet platí, že ***záporná zpětná vazba, kdy 1 + $P_Z P_{ao}$ > 1, frekvenční pásmo rozšiřuje.*** Vztahy (99) a (102) platí i pro přenosy $\hat{P}_a$, kde se současně vyskytuje dolní i horní kmitočet, platí-li, že $\omega_H >> \omega_D$. Se zápornou zpětnou vazbou vždy platí, že ***šířka pásma*** se zpětnou vazbou $\omega_H(1 + P_Z P_{ao}) - \omega_D/(1 + P_Z P_{ao})$ je větší než šířka pásma bez vazby: $\omega_H - \omega_D$.

❑ Vliv zpětné vazby na vstupní impedanci

Chceme-li zkoumat i impedanční vlastnosti na vstupu zpětnovazební struktury, musíme situaci zkoumat poněkud podrobněji, než je tomu na *obr. 13*. Dvě možná zapojení na vstupu zpětnovazební struktury jsou uvedena na *obr. 16*.



Obr. 16 *a) Sériové zapojení zpětné vazby (vstupu zesilovače a výstupu zpětnovazebního obvodu) - ideálně se předpokládá, že zpětnovazební napětí je dodáváno z ideálního* ***zdroje napětí****, které nelze ovlivnit proudem vstupním;*

b) paralelní zapojení zpětné vazby (vstupu zesilovače a výstupu zpětnovazebního obvodu) - ideálně se předpokládá, že zpětnovazební proud je dodáván z ideálního ***zdroje proudu****, který nelze ovlivnit vstupním napětím.*

Způsob získání zpětnovazební "informace" není v tomto okamžiku upřesněn. Vždy však musí platit pro zpětnovazební signály (veličiny), že

$$\hat{U}_Z = \hat{U}_1 \hat{P}_a \hat{P}_Z$$

$$\hat{I}_Z = \hat{I}_1 \hat{P}_a \hat{P}_Z$$

tedy součin $\hat{P}_a \hat{P}_Z$ musí být bez rozměru.

Vstupní impedance obvodu na *obr.16a* (***sériová vazba***) je definována zobecněným tvarem Ohmova zákona, odvození je zřejmé z uvedených poměrů:

$$\hat{Z}_{VS} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{I}_i} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_Z}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_1 \hat{P}_a \hat{P}_Z}{\hat{U}_1 / \hat{Z}_{V1}} = \hat{Z}_{V1} \cdot (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{103}$$

Je zřejmé, že pro zápornou zpětnou vazbu sériovou roste modul vstupní impedance nad hodnotu modulu bez zpětné vazby:

$$\left|\hat{Z}_{VS}\right| = \left|\hat{Z}_{V1}\right| \cdot \left|1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z\right| \geq \left|\hat{Z}_{V1}\right| \tag{104}$$

Vstupní impedance pro paralelní vazbu - obr.16b - je

$$\hat{Z}_{VP} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{I}_i} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1 + \hat{I}_Z} = \frac{\hat{Z}_{V1} \hat{I}_1}{\hat{I}_1 + \hat{I}_1 \hat{P}_a \hat{P}_Z} = \hat{Z}_{V1} / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{105}$$

Pro zápornou zpětnou vazbu paralelní klesá modul vstupní impedance pod hodnotu modulu bez zpětné vazby.

❑ Vliv zpětné vazby na výstupní impedanci

Dvě možná řazení na výstupu zesilovače jsou na *obr. 17*. Na *obr.17a* se jedná o ***napěťovou vazbu*** (v dvojbranové terminologii paralelní řazení) - ***zpětnovazební informace je odvozena od výstupního napětí.***

Na obr.17b se jedná o **proudovou vazbu** (sériové řazení na výstupu struktury) - **zpětnovazební informace je odvozena od výstupního proudu**.

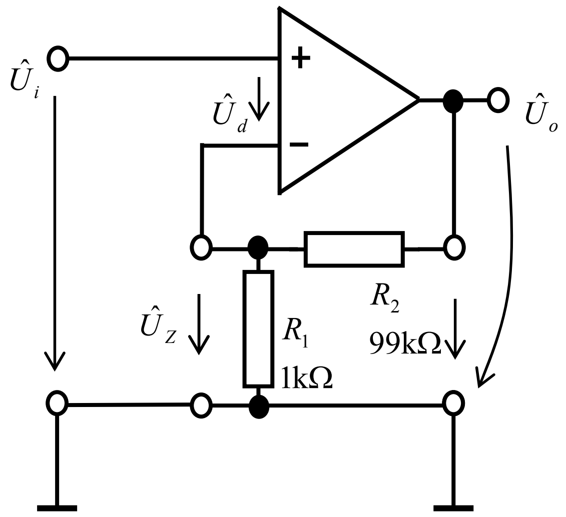
Impedanční poměry na výstupu lze určit pomocí Théveninova teorému. Výstupní impedanci stanovíme jako poměr výstupního napětí naprázdno $\hat{U}_{2P}$ a proudu nakrátko $\hat{I}'_{2K}$.

Na *obr.17 a* **při stavu naprázdno** ($R_Z \rightarrow \infty$) **není zpětná vazba rozpojena**, proto platí obecný vztah (87), tedy i

$$\hat{U}_{2P} = \hat{U}_i \cdot \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{106}$$

kde $\hat{P}_a$ je přenos přímé větve (zesilovače) bez zatížení[4].

[4] U moderních integrovaných zesilovacích struktur nemá zatěžování výstupu ve značném rozsahu vliv na jejich zesílení. U jednodušších struktur to může být podstatné.



Obr. 18 *Neinvertující zesilovač s reálným OZ*

Při zjišťování **stavu nakrátko** (*obr.17a*), kdy R_Z = 0, **je zpětná vazba rozpojena**, vstup zpětnovazebního obvodu je zkratován. Potom je vstupní napětí přímé větve $\hat{U}_1 = \hat{U}_i$ zesilováno "celým" přenosem přímé větve, platí[5]

$$\hat{I}'_{2K} = \hat{P}_a \hat{U}_i / \hat{Z}_{V2} \tag{107}$$

Ze vztahů (106) a (107) určíme výstupní impedanci $\hat{Z}_{V2N}$ s napěťovou vazbou

$$\hat{Z}_{V2N} = \hat{U}_{2P} / \hat{I}'_{2K} = \hat{Z}_{V2} / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{108}$$

Záporná zpětná vazba napěťová zmenšuje výstupní impedanci - ideálně až k nulové hodnotě $(1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z \to \infty)$ - sytém se chová jako "lepší" zdroj napětí.

Na *obr. 17b* **při stavu naprázdno** ($R_Z \to \infty$) **je zpětná vazba rozpojena**, proto platí $\hat{I}_1 = \hat{I}_i$ a tento proud[6] je zesílen "celým" přenosem přímé větve. Napětí naprázdno je potom dáno vztahem $\hat{U}_{2P} = -\hat{P}_a \hat{I}_i / \hat{Y}_{V2} = -\hat{P}_a \hat{I}_i \hat{Z}_{V2}$. **Při stavu nakrátko je zpětná vazba uzavřena**, platí tedy

$$\hat{I}'_{2K} = -\hat{I}_{2K} = -\hat{I}_i \cdot \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{109}$$

Výstupní impedance $\hat{Z}_{V2I}$ struktury s proudovou zpětnou vazbou je

$$\hat{Z}_{V2N} = \hat{U}_{2P} / \hat{I}'_{2K} = \frac{-\hat{P}_a \hat{I}_i \hat{Z}_{V2}}{-\hat{I}_i \cdot \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z)} = \hat{Z}_{V2} \cdot (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) \tag{110}$$

---

[5] Analogicky $\hat{U}_{2P} = \hat{I}_i \cdot \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z)$; $\hat{I}'_{2K} = \hat{P}_a \hat{I}_i / \hat{Z}_{V2}$, atd.

[6] Analogicky $\hat{U}_{2P} = -\hat{P}_a \hat{U}_i \hat{Z}_{V2}$; $\hat{I}'_{2K} = -\hat{I}_{2K} = -\hat{U}_i \cdot \hat{P}_a / (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z)$, atd.

Záporná zpětná vazba proudová zvětšuje výstupní impedanci - ideálně až k nekonečné hodnotě $(1+\hat{P}_a\hat{P}_Z \to \infty)$ - sytém se chová jako "lepší" zdroj proudu.

Příklad 4.

*Určete vlastnosti zesilovací struktury na obr. 18, víte-li, že **reálný operační zesilovač** má tyto vlastnosti:*

$P_{ao} \equiv A_o = 200000$ *;* $\omega_H = 2\pi \cdot 5;\ \omega_D = 0$ *; mezi vstupy je diferenční odpor*

$\hat{Z}_{V1} = R_d = 1\,\mathrm{M}\Omega$ *; výstupní odpor* $\hat{Z}_{V2} = R_o = 100\,\Omega$.

Řešení:

Jedná se o napěťovou zpětnou vazbu sériovou, zápornou. Vzhledem k odporovým poměrům lze předpokládat, že podmínky pro zavedení zpětné vazby jsou splněny téměř ideálně.

Odpor R_2 je totiž mnohonásobně větší než výstupní odpor operačního zesilovače (100 Ω), vstupní odpor zpětnovazebního dvojbranu lze z tohoto hlediska považovat za téměř nekonečný.

Současně je odpor R_d mnohonásobně větší než odpor R_1, výstupní odpor zpětnovazebního dvojbranu lze z tohoto hlediska považovat za téměř nulový.

Platí

$$\hat{P}_a = P_{ao} \cdot \frac{\omega_H}{j\omega + \omega_H} = A_o \cdot \frac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$$

Zpětnovazební přenos je dán (za uvedených poměrů) pouze děličem R_1, R_2:

$$\hat{U}_Z = \hat{U}_o R_1 / (R_1 + R_2)$$

odsud (zpětnovazební přenos se často označuje symbolem β)

$$\hat{P}_Z = \hat{U}_Z / \hat{U}_o = R_1 / (R_1 + R_2) = 10^3 / (10^3 + 99 \cdot 10^3) = 10^{-2} = \beta$$

Ze vztahu (98) proto můžeme určit, že

$$P_o = P_{ao} / (1 + P_Z P_{ao}) = A_o / (1 + \beta A_o) = 2 \cdot 10^5 / (1 + 10^{-2} \cdot 2.10^5) =$$

$$= 2 \cdot 10^5 / (1 + 2.10^3) = 100 / (1 + 1/(2.10^3)) = 100 / (1 + 5 \cdot 10^{-4}) = 99{,}95 .$$

Dále ze vztahu (99) určíme, že $\omega_{HZ} = \omega_H (1 + P_Z P_{ao}) = \omega_1 \cdot (1 + \beta A_o) = 2\pi \cdot 5 \cdot (1 + 2.10^3)$. Proto můžeme určit, že $f_{HZ} = \omega_{HZ} / (2\pi) = 5 \cdot (1 + 2.10^3) = 10005\,Hz$. Frekvenční závislost přenosu neinvertujícího zesilovače je tím již popsána, platí vztah (98):

$$\hat{P} = \frac{P_{ao}}{1 + P_Z P_{ao}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{\omega_H (1 + P_Z P_{ao})}} = \frac{P_{ao}}{1 + P_Z P_{ao}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{\omega_{HZ}}} = 99{,}95 \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{j\omega}{2\pi \cdot 10005}} .$$

Přenos klesá nad frekvencemi 10 kHz se strmostí 20 dB/dek. Tento průběh stojí za srovnání s frekvenčně nezávislým přenosem stejné struktury s ideálním operačním zesilovačem, kde ideálně platí $1 + R_2/R_1 = 100$.

Ze vztahu (103) určíme vstupní impedanci pro nulovou frekvenci

$$\hat{Z}_{VS} = \hat{Z}_{V1} \cdot (1 + \hat{P}_a \hat{P}_Z) = R_d (1 + \beta A_o) = 10^6 \cdot (1 + 2.10^3) \cong 2.10^9\,\Omega = 2\,\mathrm{G}\Omega.$$

Ze vztahu (108) určíme výstupní impedanci pro nulovou frekvenci

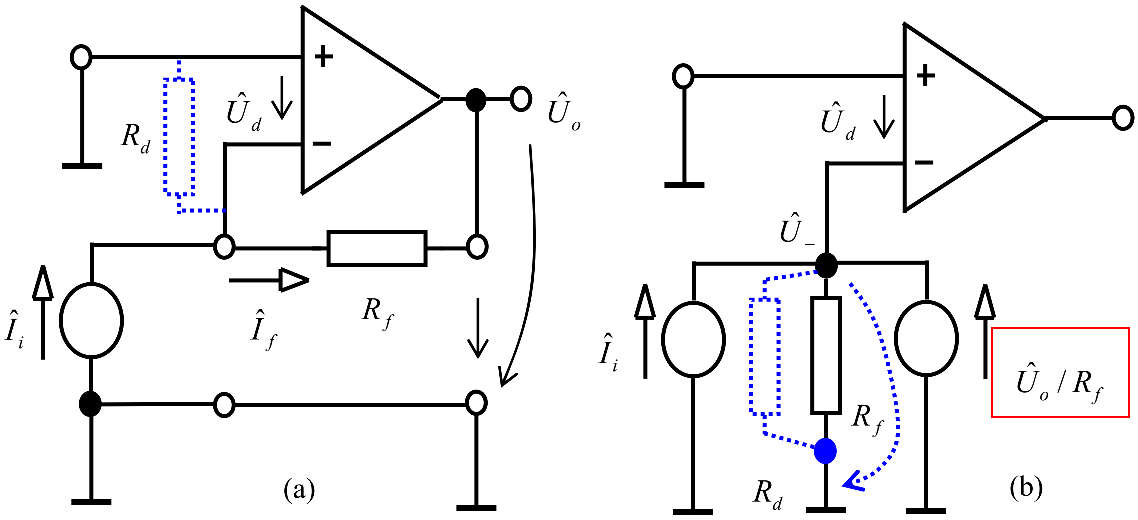
$$\hat{Z}_{V2N}=\hat{Z}_{V2}/(1+\hat{P}_a\hat{P}_Z) = R_o/(1+\beta A_o) = 100/(1+2.10^3) \cong 50\ \mathrm{m\Omega}.$$

Pro nenulové frekvence dosadíme za A_o prostě výraz $A_o\cdot\omega_1/(j\omega+\omega_1)$ a získáme odpovídající frekvenční průběhy impedancí. Modul vstupní impedance se bude s růstem frekvence zmenšovat, výstupní se bude zvětšovat - což jsou jistě nežádoucí trendy **(prověřte).**

■

Příklad 5.

Určete vstupní impedanci převodníku proud-napětí na obr. 19, znáte-li zesílení ***operačního zesilovače*** $\hat{A} = A_o\cdot\dfrac{\omega_1}{j\omega+\omega_1}$, *jeho diferenční odpor* R_d*; výstupní odpor zanedbejte (je nulový).*



***Obr. 19** a) **Převodník proudu na napětí**. Platí vždy $\hat{U}_o = \hat{A}\hat{U}_d$; b) ekvivalentní situace na vstupu obvodu.*

Řešení:

Jedná se o napěťovou zpětnou vazbu paralelní. Při teoretických úvahách se ovšem předpokládalo, že zpětnovazební proud $\hat{I}_f$ je dodáván ze zdroje proudu. A to zde není rozhodně splněno, vlastnosti zpětnovazebního obvodu budou hrát značnou roli. Proto musíme situaci na vstupu analyzovat naprosto přesně. Vliv R_f na vstupu modelujme pomocí Nortonova teorému - výsledná situace je překreslena na obr.3.19b. Snadno určíme, že napětí na invertujícím vstupu je

$$\hat{U}_- = (R_d // R_f)\cdot\left(\hat{I}_i + \hat{U}_o/R_f\right) = (R_d // R_f)\cdot\left(\hat{I}_i + \hat{U}_d\cdot\hat{A}/R_f\right) \Rightarrow \left|\hat{U}_d = -\hat{U}_-\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U}_- + (R_d // R_f)\cdot\hat{U}_-\cdot\hat{A}/R_f = (R_d // R_f)\cdot\hat{I}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{Z}_{vst} = \hat{U}_i/\hat{I}_i = \frac{(R_d // R_f)}{1+(R_d // R_f)\cdot\hat{A}/R_f} = \left|\begin{array}{l} R_d // R_f \equiv R_d R_f/(R_d+R_f) \\ \text{paralelní řazení} \end{array}\right| = \frac{(R_d // R_f)}{1+R_d\cdot\hat{A}/(R_d+R_f)}$$

Běžně v technické praxi platí, že $R_d >> R_f$ a potom dostáváme, že

$$\hat{Z}_{vst} \cong R_f/(1+\hat{A})$$

což je jiný výsledek, než který bychom získali mechanickou aplikací úvah odvozených pro ideální zpětnovazební obvody.

Snadno nyní můžeme určit i výstupní napětí

$$\hat{U}_o = \hat{U}_d \cdot \hat{A} = -\hat{U}_- \cdot \hat{A} = -\hat{I}_i \cdot \hat{Z}_{vst} \cdot \hat{A} = -\hat{I}_i \cdot R_f \cdot \hat{A}/(1+\hat{A})$$

Ke stejnému výsledku se můžeme dopracovat i pomocí následující úvahy:

Na *obr.18a* jistě platí, že

$$\hat{U}_o = -\hat{U}_d - \hat{I}_i R_f = -\hat{U}_o/\hat{A} - \hat{I}_i R_f$$

zanedbáme-li proud do invertujícího vstupu zesilovače. Odsud již snadno určíme, že

$$\hat{U}_o = -\hat{I}_i \cdot R_f \cdot \hat{A}/(1+\hat{A})$$

a tedy i

$$\hat{U}_d = \hat{U}_o/\hat{A} = -\hat{I}_i \cdot R_f/(1+\hat{A})$$

a tedy i opět

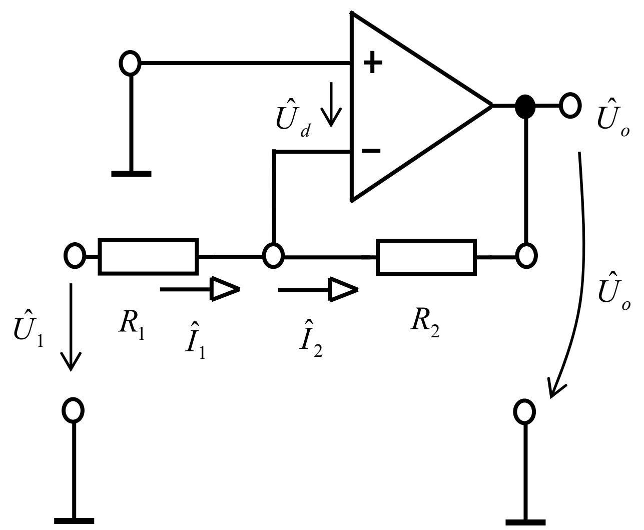
$$\hat{Z}_{vst} = -\hat{U}_d/\hat{I}_i = R_f/(1+\hat{A})$$

■

Příklad 6.

Určete přenos struktury na obr.20, znáte-li zesílení operačního zesilovače.

Využijte poznatků z řešení předchozího úkolu.



Obr. 20 *Zapojení invertujícího zesilovače.*

Řešení:

Z předchozího úkolu víme, že vstupní odpor operačního zesilovače a rezistoru R_2 je definován vztahem $\hat{Z}_{vst} = R_2/(1+\hat{A})$. Odsud již můžeme určit proud $\hat{I}_1 = \hat{U}_1/(R_1 + \hat{Z}_{vst}) =$

$\hat{I}_1 = \hat{U}_1/(R_1 + R_2/(1+\hat{A}))$. Zanedbáme-li opět proud do invertujícího vstupu operačního zesilovače, musí platit $\hat{U}_o = -\hat{U}_d - \hat{I}_1 R_2 = -\hat{U}_o/\hat{A} - R_2 \cdot \hat{U}_1/(R_1 + R_2/(1+\hat{A}))$. Základními úpravami dostaneme vztah

$$\hat{U}_o/\hat{U}_1 = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+(1+R_2/R_1)/\hat{A}}$$

Ke stejnému výsledku ovšem můžeme dospět i "přímo", bez určování vstupní impedance operačního zesilovače a rezistoru R_2. Postup pouze naznačíme (proud do invertujícího vstupu operačního zesilovače zanedbáme):

$$\hat{U}_o = -\hat{U}_d - \hat{I}_1 R_2 = -\hat{U}_o/\hat{A} - R_2\cdot(\hat{U}_{R1}/R_1) = -\hat{U}_o/\hat{A} - R_2\cdot(\hat{U}_1 - \hat{U}_d)/R_1) =$$
$$= -\hat{U}_o/\hat{A} - R_2\cdot(\hat{U}_1 - \hat{U}_o/\hat{A})/R_1) = -\hat{U}_o(1+R_2/R_1)/\hat{A} - \hat{U}_1\cdot R_2/R_1$$

Elementární úpravou vztahu opět obdržíme pro přenos

$$\hat{U}_o/\hat{U}_1 = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+(1+R_2/R_1)/\hat{A}}$$

Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.:Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha1998; podkapitola 4.2, 4.4 a 4.5

Další studijní texty

[2] Punčochář, J.: Operační zesilovače - historie a současnost. BEN - technická literatura, Praha 2002, kapitola 3

[3] Punčochář, J.: Operační zesilovače v elektronice. BEN - technická literatura, Praha 1996 až 2002 (1. až 5. vydání), čl. 21

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Co je to přenos: napěťový, proudový, smíšený (transimpedanční, transadmitanční)?
2. Co je obrazová (vlnová) míra přenosu?
3. Jak je definován ideální operační zesilovač?
4. Jak je definován gyrátor?
5. Jak je definována záporná a kladná zpětná vazba?

Odpovědi naleznete v části ti "Výklad" a v uvedené literatuře

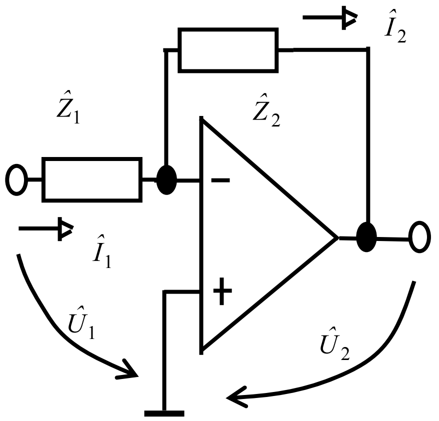
Úlohy k řešení

1. (5x1bod) Určete a pojmenujte přenosy dvojbranu, víte-li, že: a) $U_1 = 0{,}1$ V a $U_2 = 1$ V (1 bod); b) $\hat{U}_1 = 1$ V a $\hat{I}_2 = 10^{-3}\, exp(-j30°)$ (1 bod); c) $I_1 = 0{,}1$ A a $I_2 = 1$ A(1 bod); d) $\hat{I}_1 = 1\mu A$ a $\hat{U}_2 = 1 \cdot exp(-j20°)$ V (1 bod); e) definujte obrazový přenos dvojbranu (1 bod).

2. (2x4body) Určete impedanci na vstupu: a) ideálního transformátoru s převodem $n = N_1/N_2 = 1/10$; sekundár je zatížen impedancí $\hat{Z}_2 = 10^3\, exp(j30°)$ (4 body); b) gyrátoru s gyrační vodivostí $g = 10^{-3}$ S - na výstupní bránu připojen kapacitor $C = 10^{-9}$ F (4 body).

3. (celkem 3 body) Nakreslete model zdroje napětí řízeného napětím; platí $K_{21} = 10$, výstupní odpor je 10 Ω (vstupní brána je ideální) - 2 body. Jaký je řídicí výkon (vstupní výkon) - 1 bod.

4. (celkem 5 bodů) a) Určete jaké napětí je na invertujícím vstupu ideálního operačního zesilovače (viz obrázek) - 1 bod; b) Určete proudy $\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2$ - 2 body; c) určete přenos napětí - 2 body.



5. (celkem 4 body) Nakreslete obecné blokové schéma zapojení zpětnovazebního obvodu (2 body) a stručně definujte jeho přenos (2 body).

Klíč k řešení

Obecně platí $\hat{P} = \hat{X}_2 / \hat{X}_1$, index 2 definuje výstupní veličinu a index 1 veličinu vstupní. Potom:

$\hat{P}_a = U_2 / U_1 = 1/0{,}1 = 10$ - **napěťový přenos**;

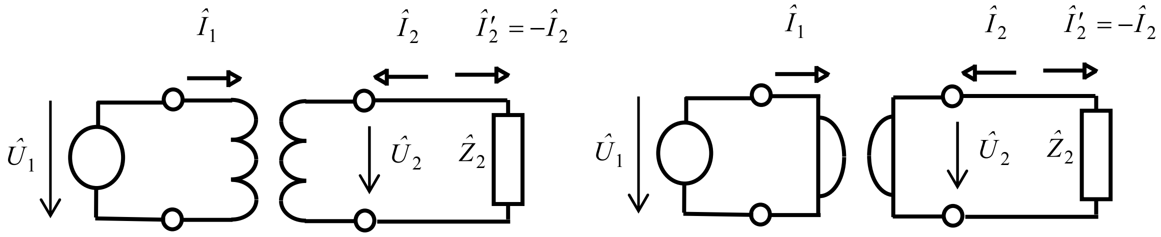
$\hat{P}_b = \hat{I}_2 / \hat{U}_1 = 10^{-3}\, exp(-j30°)/1 = 10^{-3}\, exp(-j30°)$ S - admitanční přenos (transadmitance);

$\hat{P}_c = \hat{I}_2 / \hat{I}_1 = 1/0{,}1 = 10$ - proudový přenos;

$\hat{P}_d = \hat{U}_2 / \hat{I}_1 = 1 \cdot exp(-j20°)/10^{-6} = 10^6\, exp(-j20°)$ Ω - impedanční přenos (transimpedance)

O obrazový přenos se jedná tehdy, je-li dvojbran zatížen obrazovou impedancí - vstupní impedance je právě rovna impedanci obrazové - dvojbran je obrazově přizpůsobený.

(a) Situace pro transformátor je zachycena na obrázku (a):

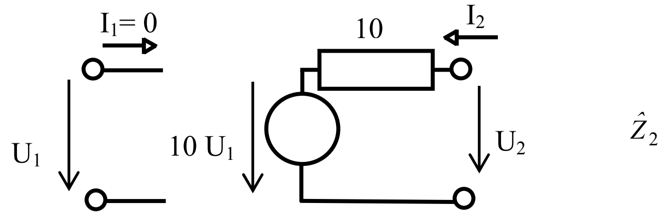


(a) (b)

Obrázek k řešení úkolu č. 2

Ideální transformátor je bezeztrátovým prvkem. Proto musí platit, že $\hat U_1 \hat I_1^x = \hat U_2 \hat I_2'^x$, tedy i $\hat U_1 \hat I_1 = \hat U_2 \hat I_2'$. Dále proto platí, že $\hat U_2 / \hat U_1 = N_2 / N_1 = \hat I_1 / \hat I_2' = \hat I_1 /(-\hat I_2)$. Impedanci vstupní brány určíme z Ohmova zákona: $\hat Z_1 = \hat U_1 / \hat I_1 = \left[\hat U_2 (N_1 / N_2)\right] / \left[(N_2 / N_1)\hat I_2'\right]$. Platí ovšem, že $\hat U_2 / \hat I_2' = \hat Z_2$ a proto obdržíme $\hat Z_1 = \hat U_1 / \hat I_1 = \hat Z_2 (N_1 / N_2)^2 = 10 \cdot exp(j30°)$.

(b) Situace pro gyrátor je zachycena na obrázku (b). Ideální gyrátor je definován vztahy $\hat I_1 = \hat G \hat U_2$ a $\hat I_2 = -\hat G \hat U_1$ ($= -\hat I_2'$). Postupujeme naprosto stejným způsobem jako v bodě (a). Platí $\hat Z_1 = \hat U_1 / \hat I_1 = (\hat I_2' / \hat G)/(\hat G \hat U_2) = 1/(\hat G^2 \hat Z_2) = 1/(10^{-6} \cdot (1/ j\omega 10^{-9})) = j\omega 10^{-3}$. Vstupní brána se chová jako ekvivalentní indukčnost L_{ekv} = 1 mH.



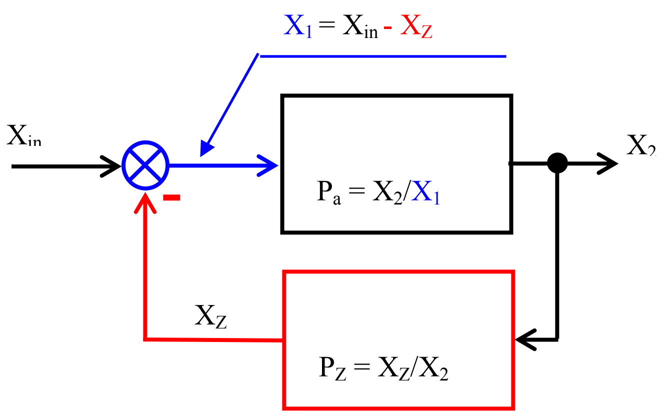
Model obvodu k úkolu č. 3

Model je na obrázku; řídicí výkon je $U_1.I_1$ = 0 W.

Ideální operační zesilovač má nekonečně velké zesílení a nulové vstupní proudy. Pro každé výstupní napětí je tedy diferenční napětí nulové. Proto: a) na invertujícím vstupu je nulové napětí; b) proud impedancí $\hat Z_1$ je $\hat I_1 = \hat U_1 / \hat Z_1 = \hat I_2$;

c) $\hat U_2 = -\hat Z_2 \hat I_2 = -\hat Z_2 \hat U_1 / \hat Z_1$; potom přenos obvodu je dán vztahem $\hat U_2 / \hat U_1 = -\hat Z_2 / \hat Z_1$ - **invertující zesilovač**.

Obecné schéma zpětnovazebního obvodu je na obrázku:



Platí zřejmě: $X_2 = P_aX_1 = P_a(X_{in} - X_Z) = P_a(X_{in} - P_ZX_2)$. Jednoduchou úpravou snadno obdržíme vztah pro přenos systému

$$P = X_2/X_{in} = P_a/(1 + P_aP_Z)$$

Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **17** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.

Zadání samostatné práce č. 4:

1. Zvolte číselné komplexní hodnoty tří prvků $\hat{A}_{ij}$ kaskádní matice a pomocí vlnových parametrů vyjádřete kaskádní rovnice ve vlnovém tvaru.

5. Obvody s nastavitelnými parametry. Fázorové čáry, amplitudové a fázové charakteristiky, Bodeho metoda

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vhodným způsobem modelovat změny parametrů obvodových prvků a zdrojů a nakreslit přímkové hodografy impedancí a admitancí (fázorové čáry).
- sestrojit hodograf (fázorovou čáru) admitance (impedance), známe-li přímkový hodograf impedance (admitance).
- aplikovat nově získané poznatky a i na změny frekvence - kmitočtové charakteristiky; stanovit nuly a póly racionální lomené funkce.
- sestrojit kmitočtové asymptotické charakteristiky (Bodeho).

Výklad

5.1 Úvod (základní úvahy a terminologie)

V praxi musíme často vyšetřit vliv **změny** velikosti **parametrů obvodových prvků** (sem patří i zdroje) na chování obvodu. Zkoumáme vždy ustálené stavy, nikoliv přechodné děje. Hledáme závislost[7] obvodových veličin nebo funkcí na parametrech obvodových prvků.

Obecně se může jednat i o současnou změnu parametrů všech prvků (součástek) obvodu. Řešení tak složitého problému je dnes možné s pomocí výpočetní techniky. My budeme vyšetřovat chování obvodu při změně jednoho parametru, zbývající prvky obvodu jsou konstantní - mají neměnné vlastnosti.

Zkoumáme-li ustálené stavy, můžeme využít všech výhod symbolicky-komplexní metody řešení obvodů. Všechny obvodové veličiny a funkce jsou (z modelového matematického hlediska) komplexní funkcí $\hat{F}(p)$ reálné proměnné - parametru p.

Parametr p může popisovat[8] změnu odporu ($R = p.R_0$), kapacity ($C = p.C_0$), indukčnosti vlastní ($L = p.L_0$) nebo vzájemné ($M = p.M_0$). Parametr p může rovněž definovat změnu vlastností řízených zdrojů.

Významným případem je **změna kmitočtu** budicích veličin ($\omega = p.\omega_0$). Tento případ budeme řešit ve zvláštním článku - jedná se o **kmitočtové charakteristiky**.

---

[7] *citlivostní analýza* - zkoumání nežádoucích změn (stárnutí součástek; vnější vlivy - teplo, vlhkost, otřesy

regulace - nastavování požadované hodnoty obvodové veličiny změnou některého parametru

toleranční analýza - zkoumání vlivu rozptylu hodnot u součástek, které jsou vyráběny v tolerančních řadách

[8] Index 0 vyznačuje vhodně zvolenou výchozí hodnotu zkoumané vlastnosti.

Zobrazením funkce $\hat{F}(p)$ v komplexní (Gaussově) rovině je **hodograf**. Popisuje-li $\hat{F}(p)$ obvodovou veličinu, je hodograf geometrickým místem koncových bodů odpovídajících fázorů a označuje se také jako **fázorová čára**. Popisuje-li $\hat{F}(p)$ obvodovou funkci, označuje se rovněž jako **impedanční**, **admitanční** nebo **přenosová charakteristika**. Hodograf má význam pouze tehdy, je-li opatřen **parametrickou stupnicí**, která umožňuje vyhodnotit chování obvodu při změně parametru.

Funkci $\hat{F}(p)$ můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru

$$\hat{F}(p) = \mathrm{Re}\left[\hat{F}(p)\right] + j \cdot \mathrm{Im}\left[\hat{F}(p)\right] \tag{1}$$

nebo ve tvaru exponenciálním

$$\hat{F}(p) = \left|\hat{F}(p)\right| \cdot exp\left[j \cdot \varphi(p)\right] \tag{2}$$

kde

$$F(p) = \left|\hat{F}(p)\right| \quad \text{je } \textbf{modulová charakteristika (modul)} \tag{3}$$

$$\varphi(p) = arg\left[\hat{F}(p)\right] \quad \text{je } \textbf{fázová charakteristika (fáze)} \tag{4}$$

Zobrazení modulu $F(p)$ a fáze $\varphi(p)$ v závislosti na p spolu poskytují naprosto stejnou informaci jako hodograf v komplexní rovině. Není nutné konstruovat parametrickou stupnici (která je většinou nelineární), jako je tomu u hodografu. Závislosti $F(p)$ a $\varphi(p)$ také mohou být zobrazeny téměř libovolně "hustě" a v libovolném vybraném intervalu.

Funkci $\hat{F}(p)$ můžeme získat a zobrazit vždy "bod po bodu", určíme-li dostatečný počet hodnot pro různá p z požadovaného intervalu - ať už zobrazujeme hodograf či modulovou a fázovou charakteristiku. Parametrickou stupnici hodografu získáme zvýrazněním vhodných hodnot p, které byly použity při výpočtu. Tento postup je naprosto **universální** a při využití výpočetní techniky i snadno realizovatelný. Při "ručních" výpočtech je ovšem poněkud zdlouhavý.

Pro jednodušší obvody můžeme využít geometrické konstrukce. Hodografy jsou většinou přímkové nebo kružnicové a lze je konstruovat včetně parametrické stupnice.

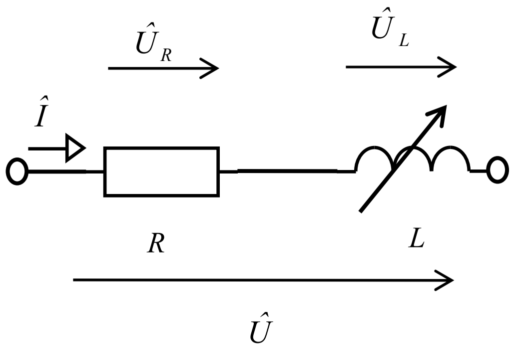
5.2 Hodografy sériového řazení R, L

Na obr. 1 je sériové řazení rezistoru R (o konstantní hodnotě odporu 10 Ω) a induktoru L, jehož indukčnost se mění tak, že pro reaktanci platí $X = p.\omega.L_0 = p.X_0 = p.10$ pro p v rozmezí 0 až ∞. Impedanční poměry jsou jednoznačně definovány vztahem

$$\hat{Z}(p) = R + j \cdot \omega \cdot p \cdot L_0 = R + j \cdot p \cdot X_0 \tag{5}$$

kde[9] $X_0 = \omega L_0$.

[9] Budeme-li uvažovat $\omega(p) = p.\omega_0$, je $X_0 = \omega_0 L$ a výsledek (5) je formálně naprosto stejný. Proto platí všechny další úvahy i pro změnu ω.



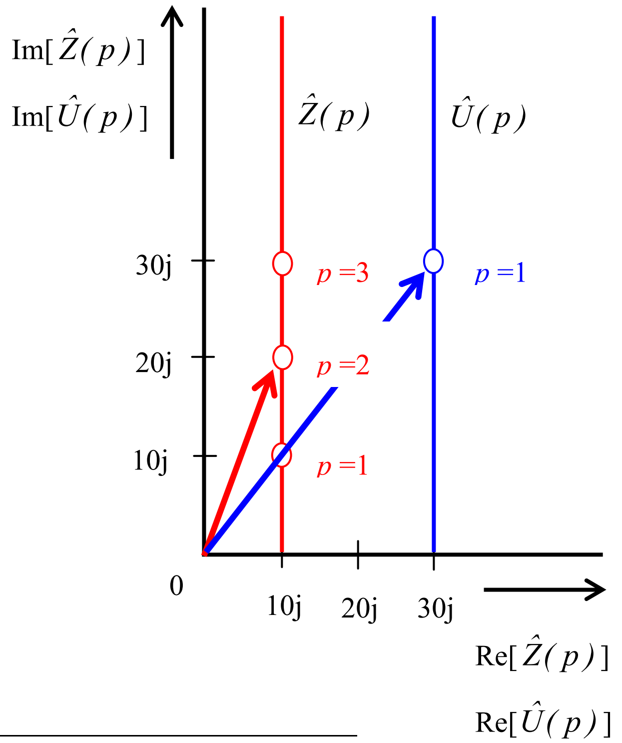
***Obr. 1** Sériové řazení rezistoru R a proměnného induktoru L*

Pro zvolené hodnoty proto platí $\hat{Z}(p) = 10 + \mathrm{j}.p.10$. Snadno se přesvědčíme, že tomuto zápisu odpovídá v komplexní rovině přímka[10] s lineární parametrickou stupnicí:

$p = 0 \qquad \hat{Z}(p) = 10$

$p = 1 \qquad \hat{Z}(p) = 10 + \mathrm{j}\,10$

$p = 2 \qquad \hat{Z}(p) = 10 + \mathrm{j}\,20$



***Obr.2** Hodograf impedance obvodu z obr.1; pro I = 3 A obdržíme fázorovou čáru $\hat{U}(p) = \hat{Z}(p) \cdot I$ (měřítko napětí m_U = 10V/dílek)*

---

[10] Obecnou rovnici přímky definuje vztah

$$\hat{F}(p) = \hat{A} + \hat{B} \cdot p \qquad (6)$$

kde $\hat{A}$ a $\hat{B}$ jsou komplexní konstanty.

Situace je znázorněna na *obr. 2*. Je důležité si uvědomit, že při kreslení hodografu impedance (impedanční charakteristiky) vždy volíme i **měřítko** impedance mZ [Ω/dílek], pro náš případ se jedná o hodnotu 10 Ω/dílek. Parametrická stupnice je pro tento případ lineární.

Určeme nyní **hodograf admitance** (admitanční charakteristiku)

$$\hat{Y}(p) = 1/\hat{Z}(p) = 1/\left(R + jpX_0\right) \tag{7}$$

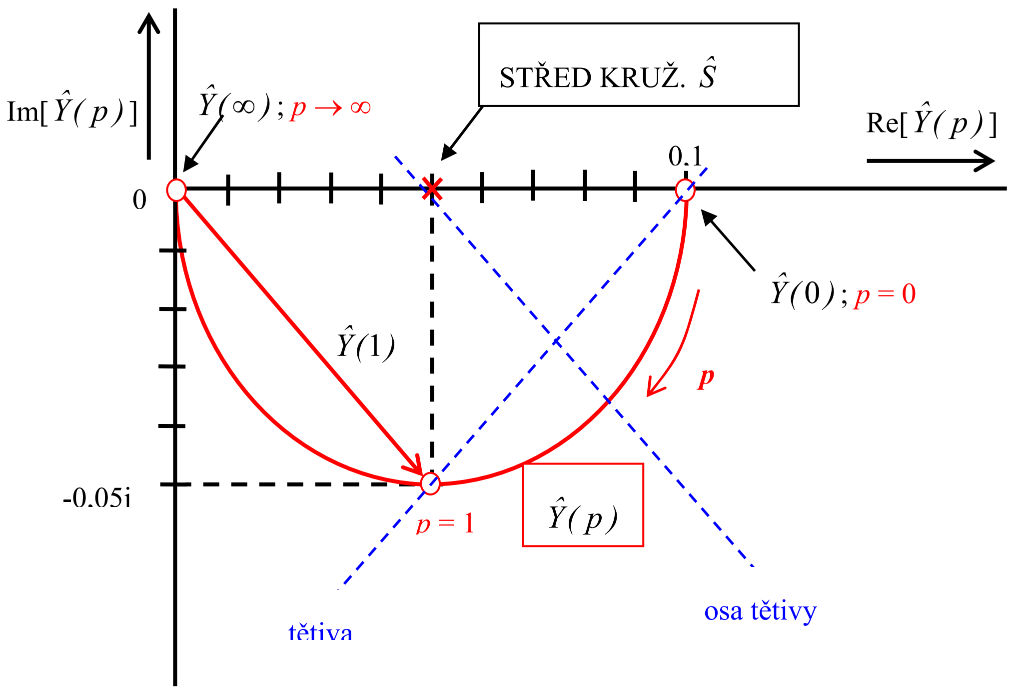
Tento zápis definuje v komplexní rovině **kružnici,** která vznikne komplexní inverzí přímky definované vztahem (5). Každou kružnici lze sestrojit ze tří známých bodů - libovolných.Výhodné je však volit tzv. **hlavní body**, kde p nabývá hodnot 0, 1 a ∞. Pro náš případ platí:

$\hat{Y}(p = 0) = 1/R = 0{,}1$ S

$\hat{Y}(p = 1) = 1/(R + \mathrm{j}X_0) = 1/(10 + \mathrm{j}.10) = 0{,}05 - \mathrm{j}.0{,}05$ S

$\hat{Y}(p \to \infty) = 1/\infty \to 0$

Situace je zachycena na *obr.3*, opět si musíme uvědomit, že při kreslení admitanční charakteristiky volíme i **měřítko admitance** mY [S/dílek] - pro náš případ 0,01 S/dílek.



Obr. 3 *Hodograf admitance, z parametrické stupnice známe pouze tři body (zde hlavní)*

Jak získáme parametrickou stupnici? Z vlastností komplexní inverze plyne následující postup (algoritmus):

Na spojnici bodu $\hat{Y}(\infty)$ a středu kružnice $\hat{S}$ (obecně může mít i imaginární složku) vztyčíme kolmou **pomocnou parametrickou přímku** pp (vhodnou z hlediska další konstrukce).

Spojnice bodu $\hat{Y}(\infty)$ a koncového bodu $\hat{Y}(0)$ vytne na pp bod A, který odpovídá hodnotě parametru $p = 0$.

Spojnice bodu $\hat{Y}(\infty)$ a koncového bodu $\hat{Y}(1)$ vytne na pp bod B, který odpovídá hodnotě parametru $p = 1$. Úsečka AB definuje na pp měřítko lineární stupnice parametru p.

Stupnici nyní můžeme sestrojit prostým "nanášením" její délky na p_p.

Body odpovídající hodnotám parametru (na pp) spojujeme přímkami s bodem $\hat{Y}(\infty)$. Tam, kde přímky protnou hodograf $\hat{Y}(p)$, vyznačíme odpovídající hodnoty parametru - parametrická stupnice na kružnici je nelineární.

Postup je znázorněn na obr.4.4. Pokud volíme nevhodnou parametrickou přímku, vzniknou problémy s přesností stupnice. Pro přímku p_{p1} je úsečka A_1B_1 příliš krátká. Pro přímku p_{p2} je úsečka A_2B_2 příliš dlouhá - vhodná pouze pro získání parametrů menších než jedna.

Je-li na obvod RL přiloženo napětí U, musí platit Ohmův zákon

$$\hat{I}(p) = U / \hat{Z}(p) = U \cdot \hat{Y}(p) \tag{8}$$

Je zřejmé, že hodograf fázoru proudu (fázorová čára) musí mít stejný tvar jako hodograf admitanční, lišit se budou pouze měřítka.

Musíme si uvědomit, co je vlastně grafickým zobrazením vyjádřeno. Platí, že modul proudu

$$\left|\hat{I}(p)\right| = I(p) = \mathrm{mI.OI}(p) \tag{9}$$

kde mI je měřítko proudu [A/dílky] a OI(p) je úsečka spojující počátek s příslušným koncovým bodem fázorové čáry proudu (pro dané p).

Modul admitance popíšeme analogicky vztahem

$$\left|\hat{Y}(p)\right| = \mathrm{Y}(p) = \mathrm{mY.OY}(p) \tag{10}$$

Pro Ohmův zákon potom musí v grafickém vyjádření platit

$$\mathrm{mI.OI}(p) = U.\ \mathrm{mY.OY}(p) \tag{11}$$

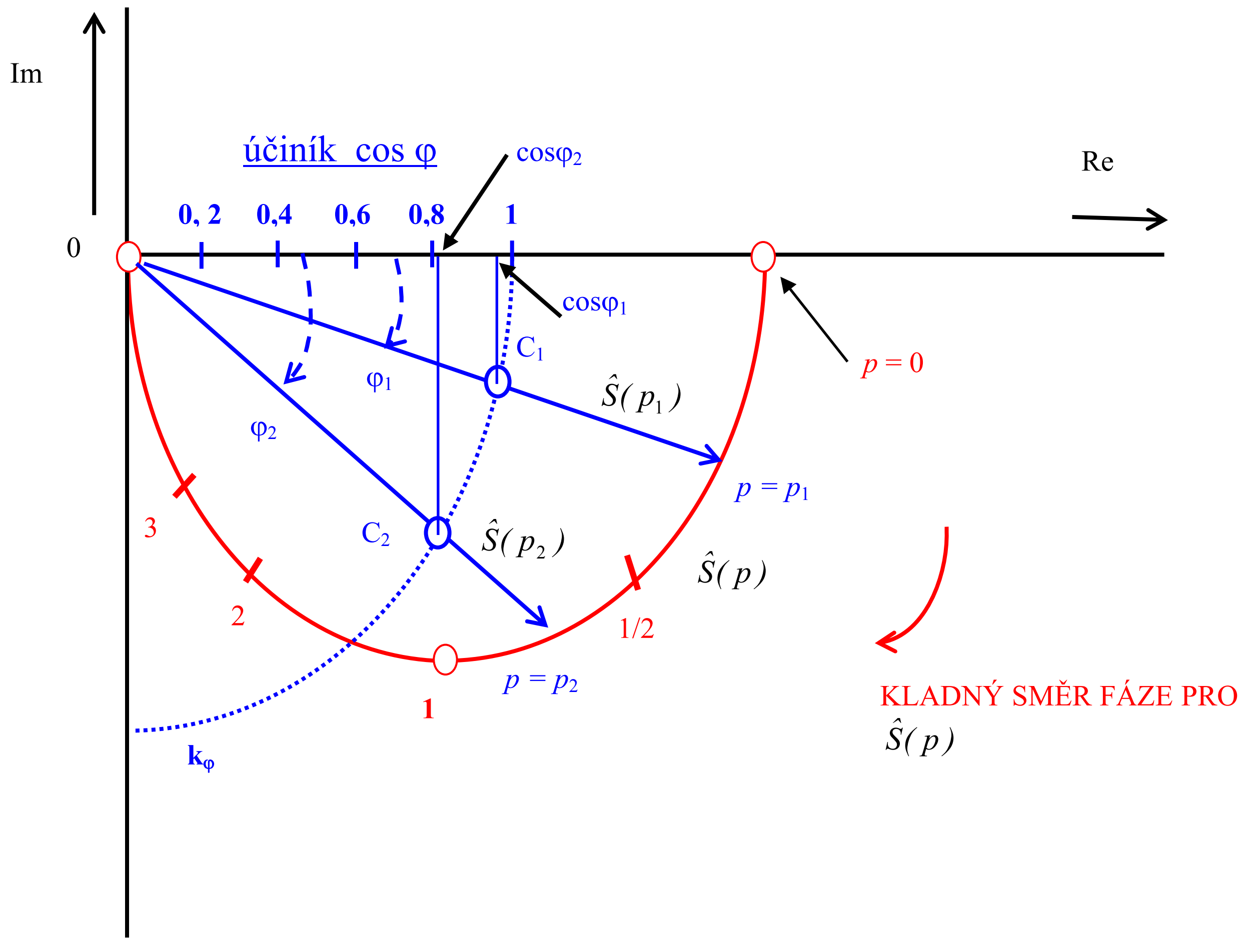
a má-li splynout grafické zobrazení $\hat{Y}(p)$ a $\hat{I}(p)$, musí platit, že úsečky OI(p) a OY(p) jsou totožné: OI(p) ≡ OY(p) . To je možné jen tehdy, platí-li

$$\mathrm{mI} = \mathrm{mY}.U \tag{12}$$

Údaje o $\hat{I}(p)$ odečítáme přímo z $\hat{Y}(p)$ s tím, že uvažujeme mI podle vztahu (12). Pro náš příklad platí mI = mY.U = 0,01.U = |pro U = 10 V| = 0,1 A/dílek.

Rovněž platí, že napětí na rezistoru R je dáno vztahem

$$\hat{U}_R(p) = R \cdot \hat{I}(p) \tag{13}$$



Obr. 4 *Určení účiníku z hodografu* $\hat{S}(p)$

Analogicky s předchozími úvahami platí pro grafické vyjádření, že modul

$$U_R(p) = \mathrm{mU}\ .\ \mathrm{OU}(p) \tag{14}$$

kde m_U je měřítko napětí.

Pro grafický popis proudu platí opět vztah (9) a proto musí platit i vztah [odpovídající vztahu (13)]

$$\mathrm{mU}\ .\ \mathrm{OU}(p) = R\ .\ \mathrm{mI.OI}(p) \tag{15}$$

Ke splynutí grafického zobrazení hodografů $\hat{U}_R(p)$ a $\hat{I}(p)$ dochází při

$$\mathrm{mU} = \mathrm{mI}.\ R \tag{16}$$

Pro náš příklad platí (pro $U = 10$ V; $R = 10\ \Omega$) mU = mI. R = 0,1 . 10 = 1 V/dílek.

Známe-li $\hat{U}_R(p)$, určíme snadno i$\hat{U}_L(p)$, protože z 2. Kirchhoffova zákona víme, že musí platit vztah $\hat{U}_R(p)+\hat{U}_L(p)=U$ - obr.5 - a $\hat{U}_L(p)$ je vůči $\hat{U}_R(p)$ posunuto o úhel π/2.

Zdánlivý výkon je definován vztahem

$$\hat{S}(p)=\hat{U}\cdot\hat{I}^{\times}(p)=|\hat{U}=U|=U\cdot\hat{I}^{\times}(p) \tag{17}$$

Abychom nemuseli konstruovat čáru komplexně sdruženou k $\hat{I}(p)$, změníme pro tento jediný případ konvenci pro orientaci úhlu φ. V grafickém vyjádření potom platí analogicky předchozím úvahám

$$S(p) = mS \,.\, OS(p) \tag{18}$$

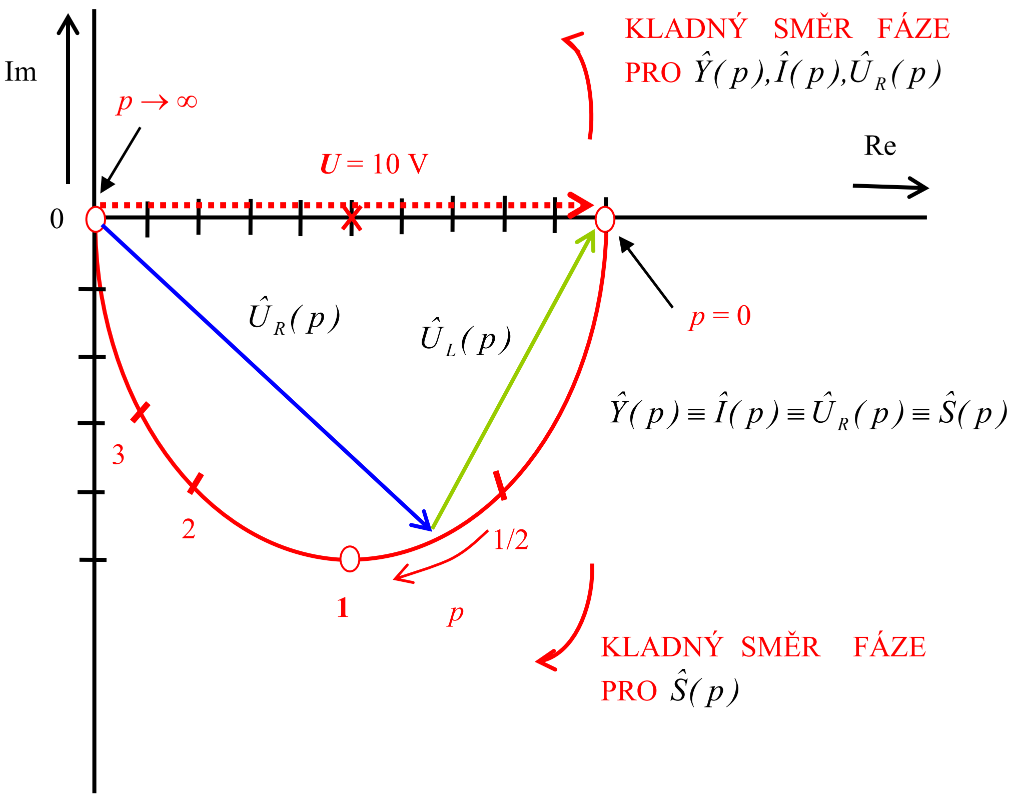
$$\left|\hat{I}^{\times}(p)\right| = \left|\hat{I}(p)\right| = I(p) = mI.OI(p) \tag{19}$$

a proto i ze vztahu (17)

$$mS \,.\, OS(p) = U.mI.OI(p) \tag{20}$$

Má-li splynout zobrazení $\hat{S}(p)$ a $\hat{I}(p)$, musí platit, že

$$mS = mIU = (mY.U).U = mY.U2 \tag{21}$$



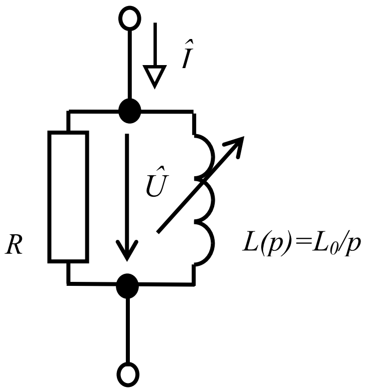
Obr. 6 *Hodografy obvodu z obr. 1 s uvedením měřítek:* $m_I = m_Y U$; $m_U = m_I R$; $m_S = m_I U$

Pro náš příklad platí mS = mY.U2 = 0,01.102 = 1 VA/dílek.

Účiník (cosφ) určíme snadno z definice funkce cosinus v pravoúhlém trojúhelníku. Do hodografu $\hat{S}(p)$ vyneseme **pomocnou kružnici** kφ se středem v počátku, která poslouží jako "úhloměr" hodografu $\hat{S}(p)$. Z bodu C, ve kterém protíná fázor $\hat{S}(p)$ kružnici kφ , spustíme kolmici na osu Re. Na vhodně rozděleném poloměru kružnice kφ odečítáme přímo cosφ - obr.6 ("celý poloměr" - φ = 0 a cos = 1; "půl poloměru" - φ = 45° a cosφ = 0,707 , atd.).

Poznámky k hodografům dalších jednoduchých řazení prvků

Hodografy dalších jednoduchých řazení prvků řešíme obdobně. Z matematického a formálního hlediska jde vždy o stejný problém, i když při paralelním řazení přísluší lineární parametrická stupnice hodografu admitance a nelineární stupnice hodografu impedance. Základní doporučení jsou zřejmá z *obr. 7* až *obr. 9*.



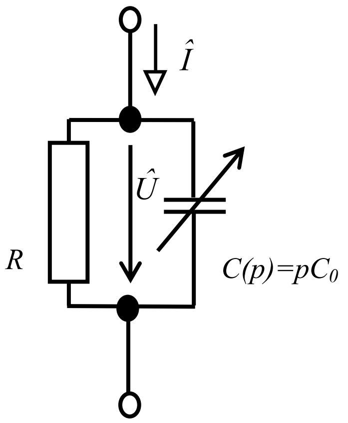
$$\hat{Y}(p) = 1/R + 1/\left[j\omega L(p)\right] = G - jp \cdot \frac{1}{\omega L_0} = G - jpB_0$$

$$B_0 = 1/(\omega L_0)$$

$$\left[nebo \quad \omega = \omega_0 / p; \; B_0 = 1/(\omega_0 L)\right]$$

$$\hat{Z}(p) = 1/\hat{Y}(p) = 1/\left(G - jpB_0\right)$$

***Obr .** 7 Paralelní řazení rezistoru R a proměnného induktoru L(p)*



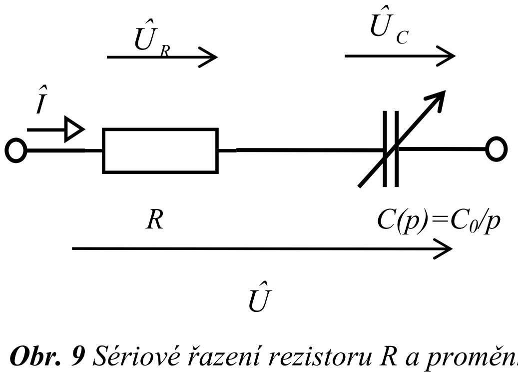
$$\hat{Y}(p) = 1/R + j\omega C(p) = G + jp\omega_0 C = G + jpB_0$$

$$B_0 = \omega C_0$$

$$\left[nebo \quad \omega = p\omega_0; \; B_0 = \omega_0 C\right]$$

$$\hat{Z}(p) = 1/\hat{Y}(p) = 1/(G + jpB_0)$$

***Obr. 8** Paralelní řazení rezistoru R a proměnného kapacitoru C*



$$\hat{Z}(p) = R + 1/\left[j\omega C(p)\right] = R - jp/(\omega C_0) = R - jpX_0$$

$$X_0 = 1/(\omega C_0)$$

$$\left[nebo \quad \omega = \omega_0 / p; X_0 = 1/(\omega_0 C)\right]$$

$$\hat{Y}(p) = 1/(R - jpX_0)$$

***Obr. 9** Sériové řazení rezistoru R a proměnného kapacitoru C(p)*

5.3 Kmitočtové charakteristiky

Změnu kmitočtu (úhlového) vyšetřujeme v praxi nejčastěji. Pro příklad posuďme **přenos** článku RC (integrační článek) na *obr.10*. Předpokládejme, že $\hat{U}_1(\omega)$ není funkcí kmitočtu, tedy $\hat{U}_1(\omega) = \hat{U}_1$ (efektivní hodnota vstupního napětí, tedy ani amplituda, není funkcí kmitočtu).

Pro impedanční dělič snadno určíme, že

$$\hat{U}_2(\omega) = \frac{\hat{U}_1}{R + 1/(j\omega C)} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\hat{U}_1}{1 + j\omega CR} \tag{22}$$

Změnu kmitočtu lze definovat výhodně vztahem (parametr přeznačíme pro změny kmitočtu na s)

$$\omega = s \cdot \omega_0 \tag{23}$$

takže vztah (22) nabývá podoby

$$\hat{U}_2(\omega) = \frac{\hat{U}_1}{1 + js\omega_0 CR} \tag{24}$$

Nyní již platí pro konstrukci hodografů vše, co bylo uvedeno. Nevýhodou je, že každá změna R nebo C by si vyžádala úplně novou konstrukci. Tuto nevýhodu můžeme zmírnit **normováním proměnných**, volbou vhodných vztažných hodnot. Ve vztahu (4.24) bude vhodné volit ω_0 tak, aby platilo

$$\omega_0 . C . R = 1 \tag{25}$$

Potom vztažná hodnota je

$$\omega_0 = 1/(C.R) \quad = 1/\tau \tag{26}$$

kde ω_0 je charakteristický kmitočet obvodu

τ je **časová konstanta** obvodu (viz přechodné děje).

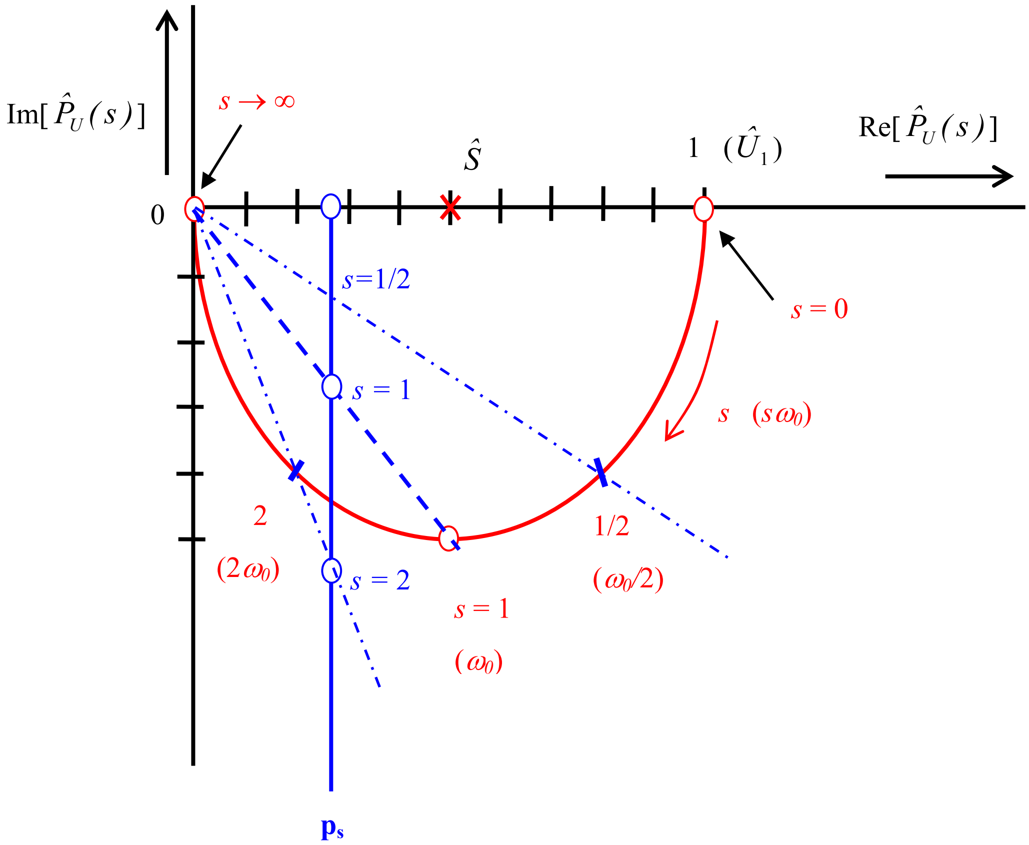
Za vztažnou hodnotu pro výstupní napětí volíme napětí vstupní a tím vlastně definujeme **napěťový přenos** $\hat{P}_U$:

$$\hat{P}_U = \hat{U}_2(\omega) \big/ \hat{U}_1 = 1/(1 + js) \tag{27}$$

kde $s = \omega/\omega_0$ - viz vztah (23)

$\omega_0 = 1/(C.R)$ - viz vztah (26).

Konstrukce hodografu $\hat{P}_U$ pole vztahu (27) je zachycena kvalitativně na obr.11 [$s = 0 \Rightarrow \hat{P}_U(0) = 1$; $s = 1 \Rightarrow \hat{P}_U(4.1) = 1/(1+j) = 0,5 - j\ 0,5 = \exp(-j45°)/\sqrt{2}$; $s \to \infty \Rightarrow \hat{P}_U(\infty) \to 0$; ps - vhodná parametrická přímka pro parametr s].



***Obr. 11**. Hodograf napěťového přenosu $\hat{P}_U(s)$ integračního členu RC; s = ω/ω₀ ; ω₀ = 1/(C.R)*

Tento hodograf platí pro všechny integrační členy podle obr. 10. V závorkách jsou uvedeny hodnoty pro nenormovaný průběh podle vztahu (24).

Nevýhodou je výrazná nelinearita parametrické stupnice přenosu; situace pro $s > 2$ se posuzuje velmi obtížně. Proto je výhodné zobrazit zvlášť modulovou a fázovou charakteristiku a pro osu kmitočtu volit logaritmickou stupnici. Vztah (27) upravíme do exponenciální podoby

$$\hat{P}_U(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \cdot exp\left[j \cdot \varphi(s)\right] \tag{28}$$

kde

$$\mathrm{tg}\,\varphi(s) = -\,s \tag{29}$$

nebo jiné možné zápisy:

$\varphi(s) = -\arg(1 + j.\,s)$; $\qquad$ $\varphi(s) = -\mathrm{arctg}(s)$.

Univerzální metodou je opět výpočet modulu a fáze pro dostatečný počet hodnot s a proložení křivek. Modul přenosu se obvykle vynáší v decibelech (dB)

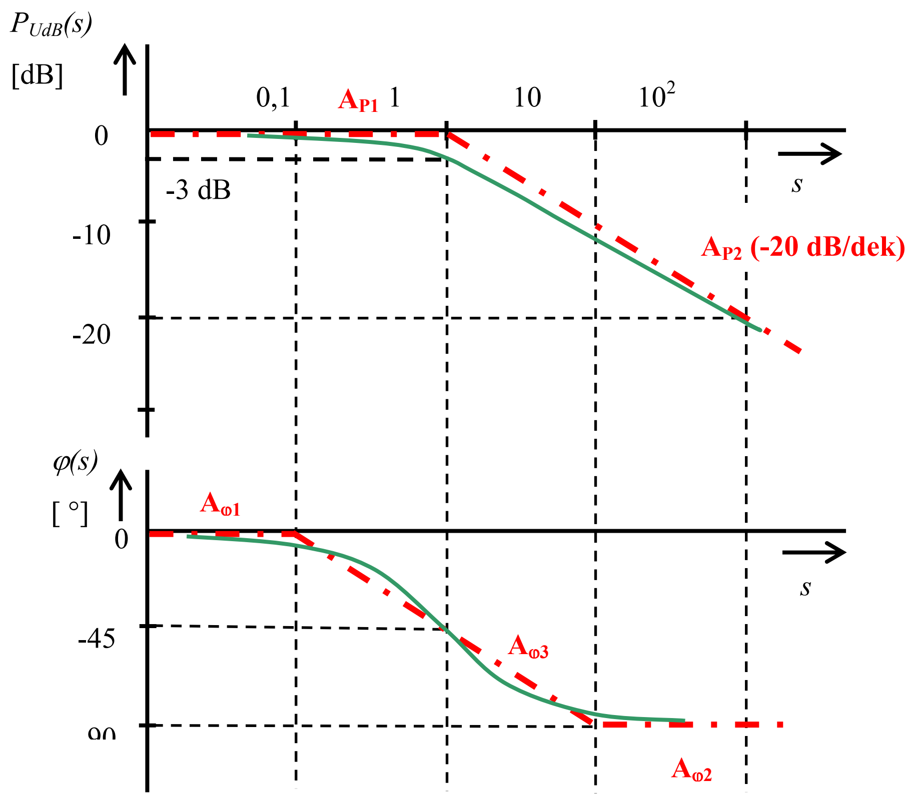
$$P_{UdB} = 20\,log\left|\hat{P}_U\right| = 20\,log\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} = -10\,log(1+s^2) \tag{30}$$

Fázová charakteristika je určena vztahem (29).

Pro integrační člen na obr. 10 platí:

$s = 0$	$P_{UdB}(0) = -\ 10\ log\ 1 = 0$ dB	$\varphi(0) = 0°$
$s = 1$	$P_{UdB}(4.1) = -\ 10\ log\ (1/\sqrt{2}\ ) \cong -3$ dB	$\varphi(1) = -\ 45°$
$s \to \infty$	$P_{UdB}(\infty) = -\ 10\ log\ (1/\infty) \to -\ \infty$ dB	$\varphi(0) = -\ 90°$

Modulová a fázová charakteristika jsou vyneseny na obr. 4.12 - často se označují jako **Bodeho charakteristiky**.



Obr. 12 *Bodeho charakteristiky integračního článku RC; plně - skutečný průběh; čerchovaně - asymptoty*

Pro ***s* << 1** je $\quad P_{UdB}(s) \cong -\ 10\ log\ 1 = 0$ dB $\quad$ - tomu odpovídá **asymptota modulu přenosu** AP1 = 0

$\varphi(s) \cong -\ \arg(1+j0) = 0°$ - tomu odpovídá **asymptota fáze přenosu** $A_\varphi 1 = 0°$

Pro ***s* >> 1** je $\quad P_{UdB}(s) \cong -\ 10\ log\ s2 = -\ 20\ log\ s$ $\quad$ - asymptota AP2

$\varphi(s) \cong -\ \arg(js) = -90°$ $\quad$ - asymptota $A_\varphi 2 = -90°$

Asymptoty modulu přenosu AP1 a AP2 se protínají právě v bodě $s = 1$. Chyba "asymptotického průběhu" - **asymptotické charakteristiky** - proti skutečnému průběhu je zde právě 3 dB. Asymptota AP2 prochází bodem $s = 1$ a má strmost (sklon) - 20 dB na dekádu (- 20 dB/dek), protože desetinásobnému zvětšení parametru odpovídá pokles modulu o 20 dB.

Asymptota $A_\varphi 1 = 0°$ platí pro $s < 0,1$, asymptota $A_\varphi 2 = -90°$ pro $s > 10$. Proložíme-li asymptotu $A_\varphi 3$ body ($s = 0,1$; $\varphi = 0°$), ($s = 1$; $\varphi = -45°$) a ($s = 10$; $\varphi = -90°$), je největší odchylka (chyba) asymptotické charakteristiky proti skutečnému průběhu - obr.12 - právě pro $s = 0,1$ a $s = 10$, a to $\Delta\varphi\text{max} = \text{arctg}(0,1) \cong 0,1$ rad (5,7°).

Obecně jsou kmitočtové charakteristiky obvodů se soustředěnými parametry popsány racionální lomenou funkcí[11]

$$\hat{F}(j\omega) = \frac{\hat{M}(j\omega)}{\hat{N}(j\omega)} = \mathrm{K} \cdot \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2)...(j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)...(j\omega - p_n)} \tag{31}$$

K je konstanta (násobná)

$\hat{M}(j\omega)$ je polynom čitatele

m je stupeň čitatele

zk jsou kořeny čitatele - **nuly** funkce [$\hat{F}(j\omega) \rightarrow 0$]

$\hat{N}(j\omega)$ je polynom jmenovatele

n je stupeň jmenovatele

pk jsou kořeny jmenovatele - **póly** funkce [$\hat{F}(j\omega) \rightarrow \infty$]

Pro pasivní obvody R, L, C jsou nuly i póly vždy reálné a záporné[12], v krajním případě komplexně sdružené, s reálnou částí zápornou. Stupeň čitatele a jmenovatele se liší maximálně o hodnotu 1 (pozitivně reálná funkce, Bruneho věta).

Proto platí

$$z\text{k} = -\omega\text{ak}; \qquad \text{k} \in \langle 1, m \rangle$$
$$p\text{k} = -\omega\text{bk}; \qquad \text{k} \in \langle 1, n \rangle \tag{32}$$

a kořenové činitele ze vztahu (31) je možné přepsat:

$$\hat{F}(j\omega) = \mathrm{K} \cdot \frac{(j\omega + \omega_{a1})(j\omega + \omega_{a2})...(j\omega + \omega_{am})}{(j\omega + \omega_{b1})(j\omega + \omega_{b2})...(j\omega + \omega_{bn})} =$$

$$= \mathrm{K} \cdot \frac{\omega_{a1}\omega_{a2}\cdots\omega_{am}}{\omega_{b1}\omega_{b2}\cdots\omega_{bn}} \cdot \frac{(1 + j\omega/\omega_{a1})(1 + j\omega/\omega_{a2})...(1 + j\omega/\omega_{am})}{(1 + j\omega/\omega_{b1})(1 + j\omega/\omega_{b2})...(1 + j\omega/\omega_{bn})} = \tag{33}$$

$$= \mathrm{K}' \cdot \frac{(1 + js_{a1})(1 + js_{a2})...(1 + js_{am})}{(1 + js_{b1})(1 + js_{b2})...(1 + js_{bn})}$$

---

[11] Proměnná $(j\omega)$ je důsledkem imitančního popisu prvků obvodu: $j\omega L$, $j\omega C$, $j\omega M$

[12] U stabilních obvodů obecně platí toto tvrzení vždy pro póly. Nuly mohou mít reálnou část kladnou - v čitateli to "nevadí".

kde

$\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cdot \dfrac{\omega_{a1}\omega_{a2} \cdots \omega_{am}}{\omega_{b1}\omega_{b2} \cdots \omega_{bn}}$ je nová násobná konstanta

$s_{ak} = \omega/\omega_{ak} = \omega.\tau_{ak}$ je normovaný kmitočet kořenového činitele čitatele (nuly)

$s_{bk} = \omega/\omega_{bk} = \omega.\tau_{bk}$ je normovaný kmitočet kořenového činitele jmenovatele (pólu)

Operace násobení se mění po logaritmování v operaci sečítání, operace dělení se mění v operaci odečítání. Proto je výhodné určit modul vztahu (33) v decibelech. Snadno určíme, že modul (modulová charakteristika) je určen vztahem

$$F(s) = \left|\hat{F}(js)\right| = \mathrm{K}' \cdot \frac{|1 + js_{a1}| \cdot |1 + js_{a2}| \ldots |1 + js_{am}|}{|1 + js_{b1}| \cdot |1 + js_{b2}| \ldots |1 + js_{bn}|} \tag{34}$$

a odsud již snadno určíme, že

$$F_{dB}(s) = 20 \cdot log\, F(s) = 20 \cdot \left[log\, \mathrm{K}' + \sum_{k=1}^{m} log \sqrt{1 + s_{ak}^2} - \sum_{k=1}^{n} log \sqrt{1 + s_{bk}^2} \right] \cdot \tag{35}$$

Fázová charakteristika je určena vztahem

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{m} arg(1 + js_{ak}) - \sum_{k=1}^{n} arg(1 + js_{bk}) \tag{36}$$

Pomocí vztahů (35) a (36) můžeme snadno konstruovat asymptotické charakteristiky (Bodeho). Celý problém se zjednoduší na sečítání a odečítání asymptot modulů funkce typu $20 log \sqrt{1 + s^2}$ a sečítání a odečítání asymptot fázové charakteristiky typu $arg(1 + js)$.

a) Nulový kořen (potom s_{ak}, s_{bk} >> 1, viz vztah (37))

Pro tento případ stačí zkoumat kořenový činitel typu

$$\hat{F}_a(js) = 1 + j\omega/\omega_0 = \left|\text{pro}\,\omega_0 \to 0\right| \cong js \tag{37}$$

Je zřejmé, že reálná část je za této podmínky opravdu zanedbatelná.

Zřejmě platí soubor vztahů

$$\begin{aligned} F_{adB}(s) &= 20 \cdot log\, s = 20 \cdot log(\omega/\omega_0) \\ \varphi_a(s) &= +\pi/2 \end{aligned} \tag{38}$$

Modulová charakteristika je v logaritmických souřadnicích popsána přímkou, která prochází osou 0 dB v bodě $s = \omega/\omega_0 = 1$ a má sklon (strmost) +20 dB na dekádu. Fáze je konstantní, nezávisle na kmitočtu (tedy + 90°).

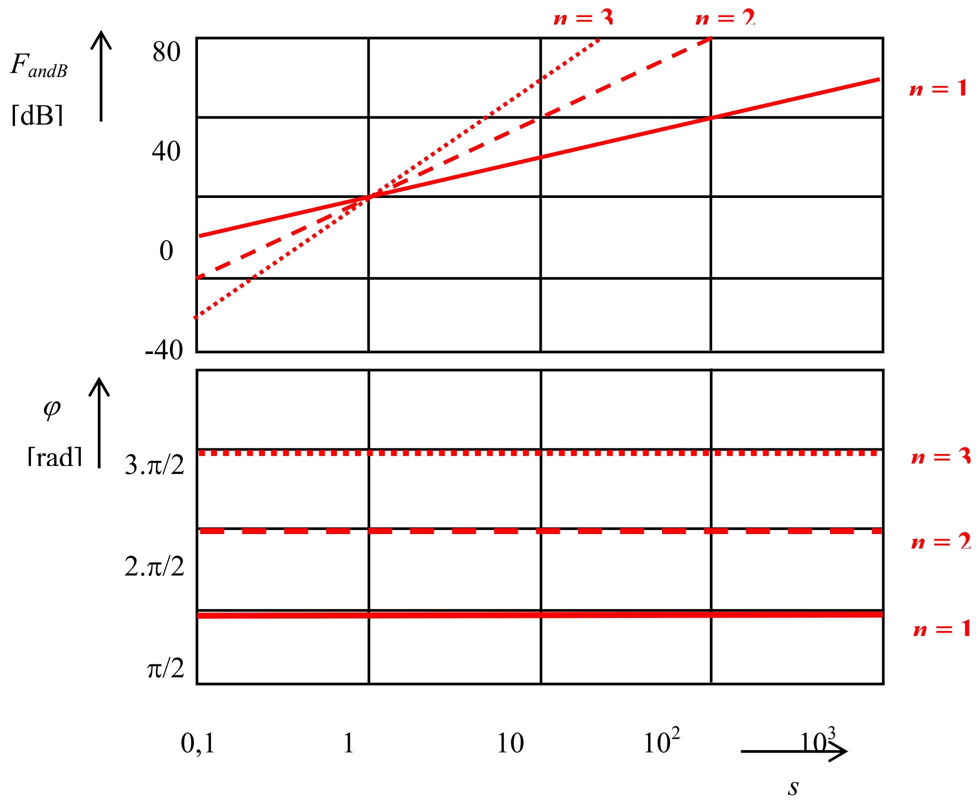
Je-li nulový kořen násobný s násobností n , platí

$$\hat{F}_{an}(js) = (js)^n \tag{39}$$

a potom

$$\begin{aligned} F_{andB}(s) &= n \cdot 20 log\, s \\ \varphi_{an}(s) &= n \cdot \pi/2 \end{aligned} \tag{40}$$

Modulová charakteristika má nyní sklon n.20 dB/dek a opět prochází osou 0 dB v bodě $s = 1$. Fázová charakteristika je opět konstantní, rovna hodnotě $+n.\pi/2$. Příklady charakteristik jsou na obr.13.



***Obr. 13** Modulová a fázová charakteristika kořenového činitele* $\hat{F}_{an}(js) = (js)^n$; *n - násobnost kořenového činitele*

b) Záporný reálný kořen

Kořenu reálnému zápornému přísluší kořenový činitel

$$\hat{F}_b(js) = 1 + j\omega/\omega_0 = 1 + js \tag{41}$$

Zřejmě platí

$$F_{bdB}(s) = 20 \cdot log\sqrt{1+s^2} \tag{42}$$

$$\varphi_b(s) = arg(1+js) = arctg(s) \tag{43}$$

Průběhy modulové a fázové charakteristiky jsou na obr.14.

Pro asymptoty modulové charakteristiky snadno určíme

$A1 = F_{bdB}(s < 1) \cong 20\ log(1) = 0$ dB

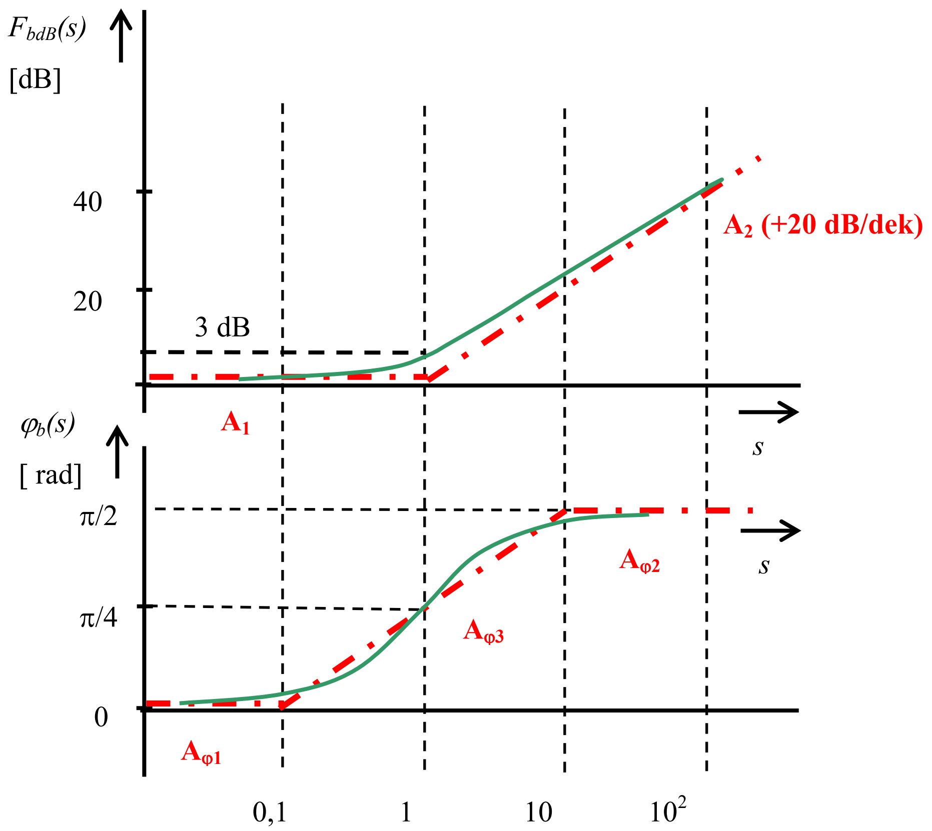
$A_2 = F_{bdB}(s > 1) \cong 20\ log(s)$ - tomu odpovídá sklon + 20 dB/dek.

Pro asymptoty fázové charakteristiky platí

$A\varphi 1 = \varphi(s < 0{,}1) \cong 0$

$A_{\varphi 2} = \varphi(s > 10) \cong \pi/2$

Mezi body (s = 0,1; φ = 0) a (s = 10; φ = π/2) proložíme asymptotu Aφ3, která prochází i bodem (s = 1; φ = π/4) - viz i poznámky k obr. 12.



***Obr.14**. Modulové a fázové charakteristiky kořenového činitele $\hat{F}_b(js)$; plně - skutečný průběh; čerchovaně - asymptoty*

Pro násobný kořenový činitel $(1+js)^n$ zřejmě platí

$$F_{bndB}(s) = n \cdot 20 \cdot log\sqrt{1+s^2}; \qquad \varphi_{bn}(s) = arg(1+js)^n = n \cdot arctg(s)$$

c) Komplexně sdružené kořeny

Komplexně sdružené kořeny přísluší kvadratickému trojčlenu

$$\hat{F}_c(js) = (js)^2 + 2a(js) + 1 \tag{44}$$

kde a je konstanta, jejíž modul je menší než 1

Trojčlen se nedá rozložit na kořenové činitele s reálnými kořeny (řešení kvadratické rovnice).

Pro $s \ll 1$ je $\hat{F}_c(js) \cong 1$ a proto $F_{cdB}(s) \cong 0$ dB - asymptota A1; $\varphi_c(s) \cong 0°$ - asymptota Aφ1.

Pro $s \gg 1$ je $\hat{F}_c(js) \cong (js)^2$ a proto $F_{cdB}(s) \cong 40 \cdot log\, s$ - asymptota A2; $\varphi_c(s) \cong 2.\pi/2$ - asymptota Aφ2; sklon F_{cdB} je za těchto podmínek roven hodnotě +40 dB/dek.

Odchylka modulové charakteristiky od společného bodu asymptot (s = 1; 0 dB) je rovna hodnotě

$\Delta_{F1} = 20\log|2a|$ protože zde platí, že $(js)2 + 1 = (j1)2 + 1 = -1 + 1 = 0$ a proto $\hat{F}_c(j1) \cong 2jas$.

Odchylku fázové charakteristiky pro $s = 0{,}1$ od asymptoty $A\varphi1$ určíme snadno:

$$\hat{F}_c(j0{,}1) = -0{,}01 + 0{,}2aj + 1 \cong 1 + 0{,}2aj$$

tedy

$$\Delta\varphi1(0{,}1) = arctg(0{,}2a)$$

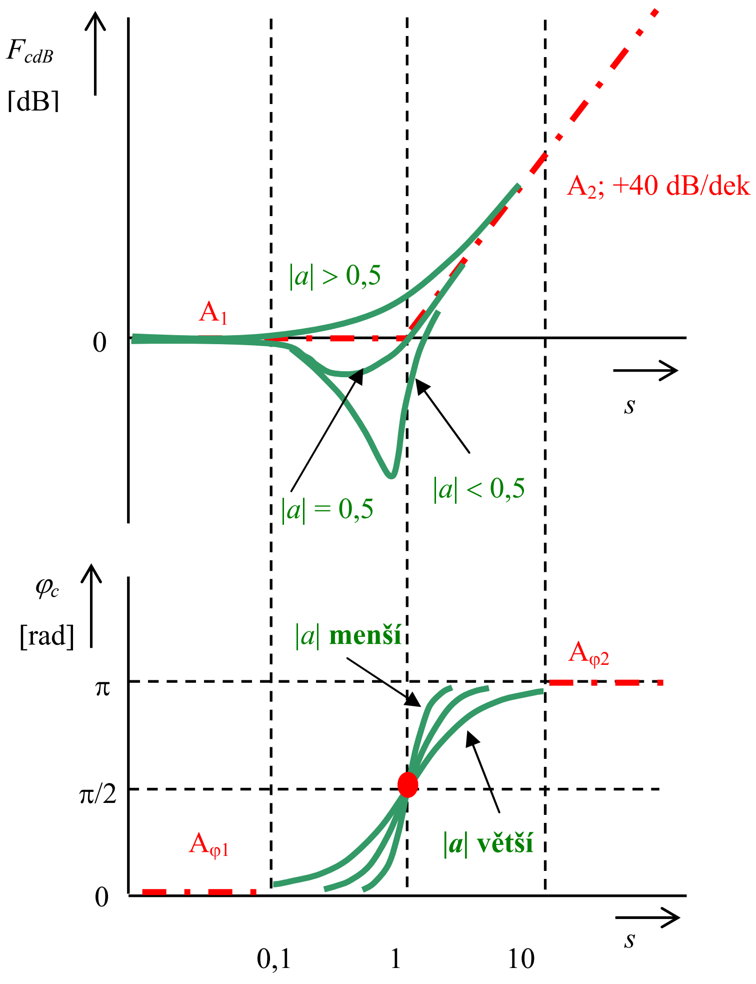
Odchylku fázové charakteristiky pro $s = 10$ od asymptoty $A\varphi2$ určíme obdobně:

$$\hat{F}_c(j10) = -100 + 20aj + 1 \cong -100 + 20aj$$

tedy

$$\Delta\varphi2(4.10) = -\ arctg(0{,}2a)$$

Situace je kvalitativně znázorněna na obr.4.15.

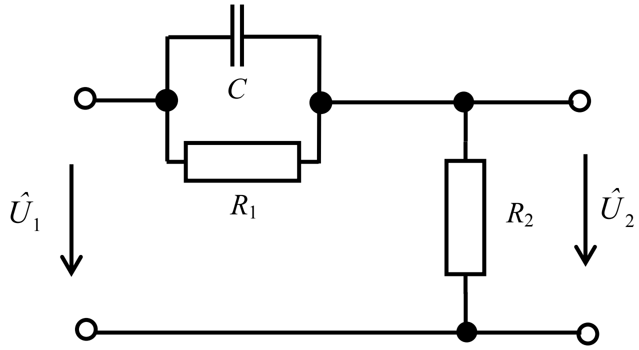


***Obr. 15**. Normované kmitočtové charakteristiky kvadratického trojčlenu*

Pro orientační určení kmitočtových charakteristik používáme asymptot určených v předchozí části úvah. Skládáme dílčí asymptotické charakteristiky kořenových činitelů. Součinům členů v čitateli (nuly) odpovídá sečítání, členům ve jmenovateli (póly) odpovídá odečítání - viz vztahy (35) a (36). Modulové charakteristiky jsou při tomto jednoduchém postupu zobrazeny celkem dobře (dB). Fázové charakteristiky jsou zobrazeny méně přesně, zvláště jsou-li kmitočty lomu (ω_a, ω_b) blízko sebe. Je-li požadována větší přesnost, nezbývá nic jiného, než určit charakteristiky přesným výpočtem "bod po bodu".

Příklad 1.

Nakreslete asymptotickou modulovou a fázovou charakteristiku obvodu na obr.16.



Obr. 16 *Obvod RC k příkladu [R_1 = 25 kΩ; R_2 = 1 kΩ C = 200 nF]*

Řešení:

Jedná se o impedanční dělič, jehož napěťový přenos určíme běžným postupem:

$$\hat{P}_U = \hat{Z}_2 /(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)$$

přičemž

$$\hat{Z}_1 = \left[R_1 . \frac{1}{j\omega C}\right] \Big/ \left[R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right] = \frac{R_1}{1 + j\omega CR_1} \quad ; \quad \hat{Z}_2 = R_2 \quad .$$

Při upravování vztahů musíme dosáhnout formální shodu se vztahem (33). To nám umožní přímo využít teoreticky udělané úvahy pro jednotlivé typy kořenových činitelů. Proto bude demonstrován celý "upravovací" postup ($s = \omega/\omega_0$) :

$$\hat{P}_U = \frac{R_2}{\dfrac{R_1}{1 + j\omega CR_1} + R_2} = \frac{R_2 \cdot (1 + j\omega CR_1)}{R_1 + R_2(1 + j\omega CR_1)} = R_2 \cdot \frac{1 + j\omega CR_1}{R_1 + R_2 + j\omega CR_1 R_2} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1 R_2 /(R_1 + R_2)} = 0{,}0385 \cdot \frac{1 + j\omega 5 \cdot 10^{-3}}{1 + j\omega 1{,}923 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 0{,}0385 \cdot \frac{1 + j\omega / 200}{1 + j\omega / 5200}$$

Ze srovnání se vztahem (33) je zřejmé, že platí (pouze jedna nula a jeden pól přenosu):

$\omega_a = 1/\tau_a = 1/(CR1) = 200$

$\omega_b = 1/\tau_b = 1/[CR1R2/(R1+R_2)] = 5200$

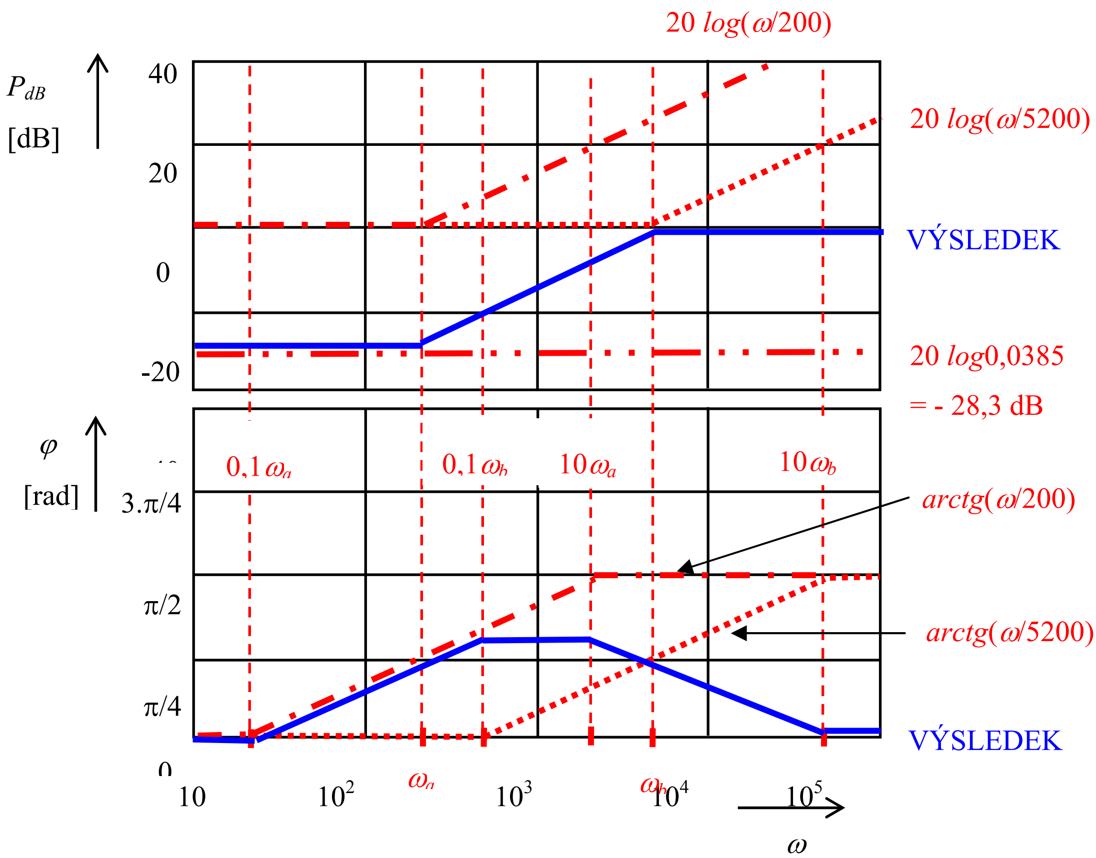
$K' = R2/(R1+R2) = 0{,}0385.$

Nyní již snadno určíme, ve shodě s předchozími úvahami, že:

$$P_{UdB}(\omega) = 20\,log\,0{,}0385 + 20\,log\left|1 + j\omega/200\right| - 20\,log\left|1 + j\omega/5200\right|$$

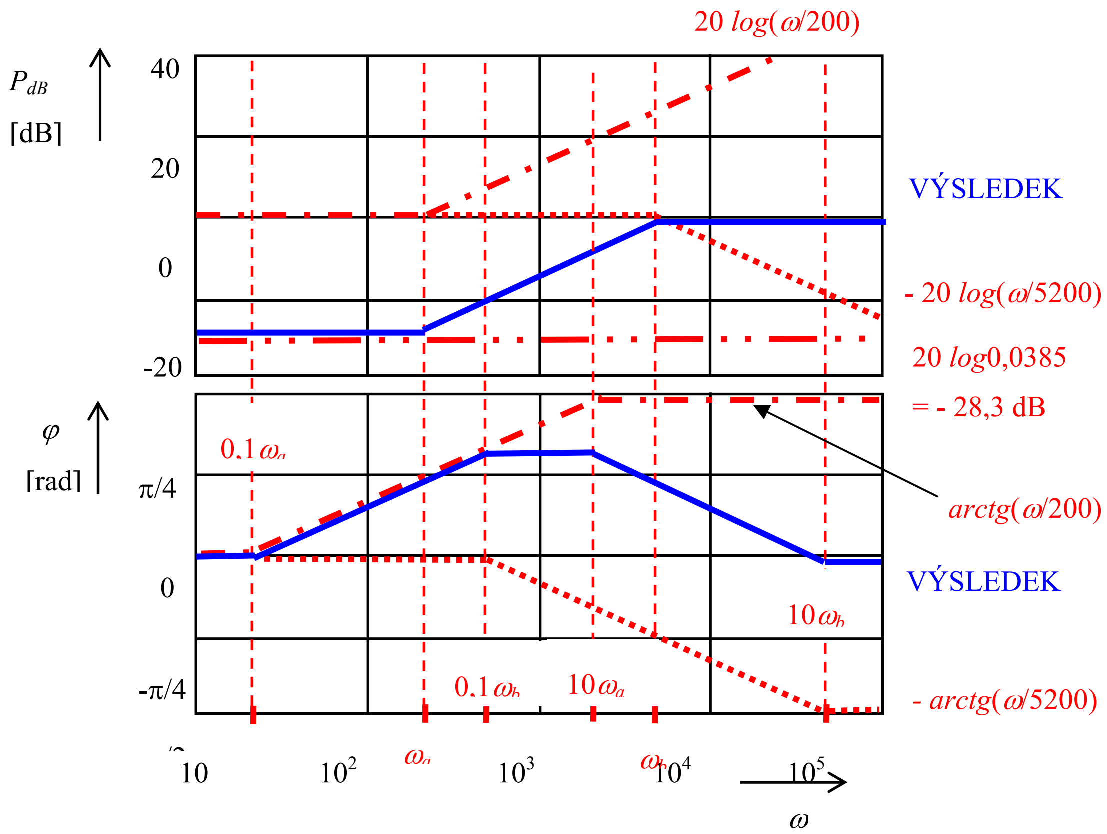
$\varphi(\omega) = arctg(\omega/200) - arctg(\omega/5200)$. Máme-li vhodně konstruovat asymptotické charakteristiky, musí frekvenční osa obsahovat i kmitočty 0,1.200 = 20 a 10.5200 = 52000, aby byly přiměřeně zachyceny fázové poměry. Celé řešení je znázorněno na *obr. 17.*

Od asymptot odpovídajících kořenovému činiteli s kmitočtem ω_a odečítáme (graficky) asymptoty odpovídající kmitočtu ω_b. V modulové charakteristice musíme přičítat i člen 20.*log*0,0385 = - 28,3 dB, který popisuje násobnou konstantu.



***Obr. 17** Asymptotické charakteristiky obvodu z obr. 16*

K naprosto stejnému výsledku dospějeme, znázorníme-li asymptoty příslušné kořenovému činiteli ve jmenovateli (zde tedy ω_b) přímo se záporným znaménkem a takto sestrojené asymptoty potom sečítáme (graficky) - obr.18.



Obr. 18 *Asymptotické charakteristiky obvodu z obr. 16*

Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.:Základy teorie elektrických obvodů 1. Skriptum ČVUT Praha1999; podkapitola 7.8

Další studijní texty

[2] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981, podkapitola 5.3

Otázky

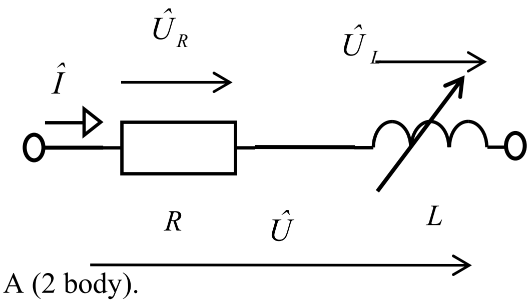
Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Proč zkoumáme vliv změny parametru obvodu?
2. Co je fázorová čára?
3. Je změna frekvence změnou parametru obvodu?
4. Co je asymptota podle Bodeho ?

Odpovědi části "Výklad" a v uvedené literatuře

Úlohy k řešení

1. (5 bodů) Sestrojte přímkovou fázorovou čáru (hodograf) impedance obvodu na obrázku, je-li $\omega L0 = 10\ \Omega$ a $R = 10\ \Omega$ (vhodná volba parametru 1 bod, ostatní 2 body). Sestrojte fázorovu čáru napětí pro

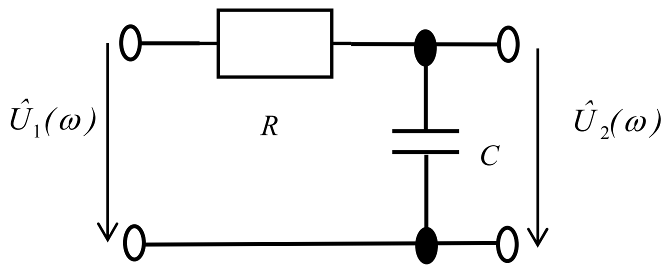


Sériové řazení rezistoru *R* a proměnného induktoru *L*

proud $I = 3$ A (2 body).

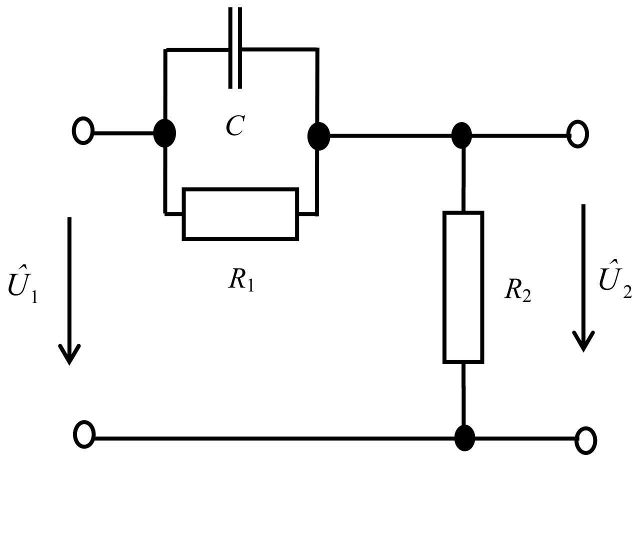
2. (6 bodů) Sestrojte fázorovou čáru admitance příslušející fázorové čáře impedance z předchozího bodu.

3. (6 bodů) Sestrojte hodograf napěťového přenos



Integrační článek RC

4. (6 bodů) Sestrojte amplitudovou a fázovou asymptotickou charakteristiku (kmitočtovou) obvodu na obrázku.



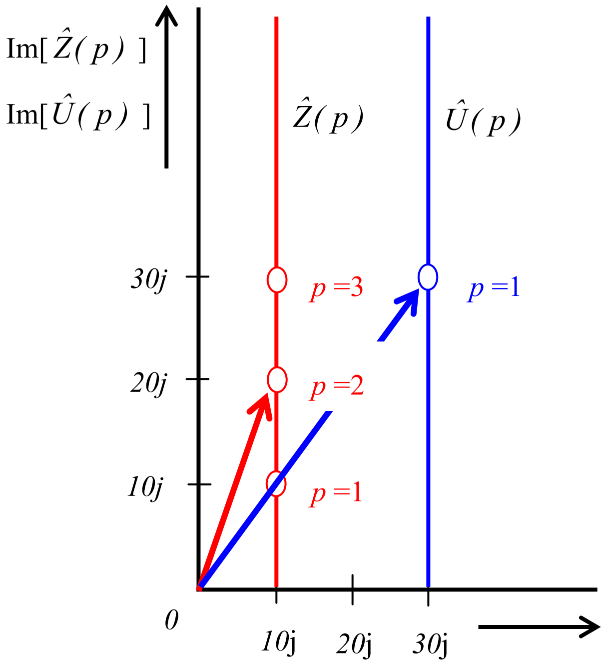
Obvod RC k úkolu 4

[$R_1 = 2{,}5\ \mathrm{k\Omega}$; $R_2 = 100\ \Omega$; $C = 2\ \mu\mathrm{F}$]

KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Impedanční poměry a jejich změny jsou vhodně a jednoznačně definovány vztahem

$\hat{Z}(p) = R + j \cdot \omega \cdot p \cdot L_0 = R + j \cdot p \cdot X_0 =$ 10 + j.p.10. Dosazováním "za p" získáme potřebné fázorové čáry.



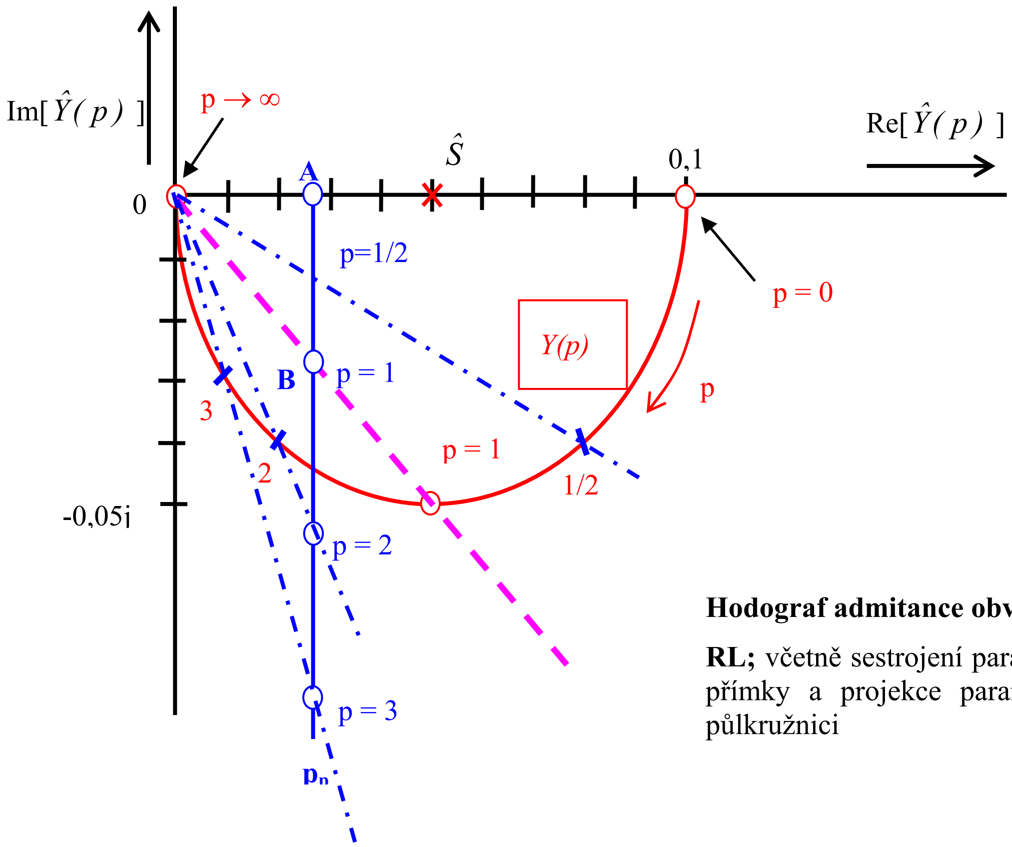
Hodograf impedance obvodu RL;

pro I = 3 A obdržíme fázorovou čáru $\hat{U}(p) = \hat{Z}(p) \cdot I$ (měřítko napětí m_U = 10V/dílek)

2. Určeme nyní **hodograf admitance** (admitanční charakteristiku) k předchozímu zadání: $\hat{Y}(p) = 1/\hat{Z}(p) = 1/(R + jpX_0)$. Tento zápis definuje v komplexní rovině **kružnici**. Každou kružnici lze sestrojit ze tří známých bodů. Výhodné je však volit tzv. **hlavní body:**

$\hat{Y}(p=0)$=1/R = 0,1 S; $\hat{Y}(p=1)$=1/(R+jX0) = 1/(10 + j.10) = 0,05 - j.0,05 S;

$\hat{Y}(p \to \infty)$ = 1/∞ → 0.



Hodograf admitance obvodu

RL; včetně sestrojení parametrické přímky a projekce parametrů na půlkružnici

Za konstrukci půlkružnice jsou 2 body.

Jak získáme parametrickou stupnici? Na spojnici bodu $\hat{Y}(\infty)$ a středu kružnice $\hat{S}$ vztyčíme kolmou **pomocnou parametrickou přímku p_p** ; spojnice bodu $\hat{Y}(\infty)$ a koncového bodu $\hat{Y}(0)$ vytne na $\mathbf{p_p}$ bod **A**, který odpovídá hodnotě parametru **p = 0**; **spojnice** bodu $\hat{Y}(\infty)$ a koncového bodu $\hat{Y}(1)$ vytne na $\mathbf{p_p}$ bod **B**, který odpovídá hodnotě parametru **p = 1**; úsečka **AB** definuje na $\mathbf{p_p}$ měřítko lineární stupnice parametru **p**; stupnici nyní můžeme sestrojit prostým "nanášením" její délky na $\mathbf{p_p}$. Body odpovídající hodnotám parametru (na $\mathbf{p_p}$) spojujeme přímkami s bodem $\hat{Y}(\infty)$. Tam, kde přímky protnou hodograf **Y(p)**, vyznačíme odpovídající hodnoty parametru - parametrická stupnice na kružnici je nelineární.

Za konstrukci parametrické přímky jsou 2 body, za projekci na půlkružnici rovněž 2 body.

3. Pro impedanční dělič snadno určíme, že

$$\hat{U}_2(\omega) = \left[\hat{U}_1 /(R + 1/(j\omega C))\right] \cdot (1/j\omega C) = \hat{U}_1 /(1 + j\omega CR)$$

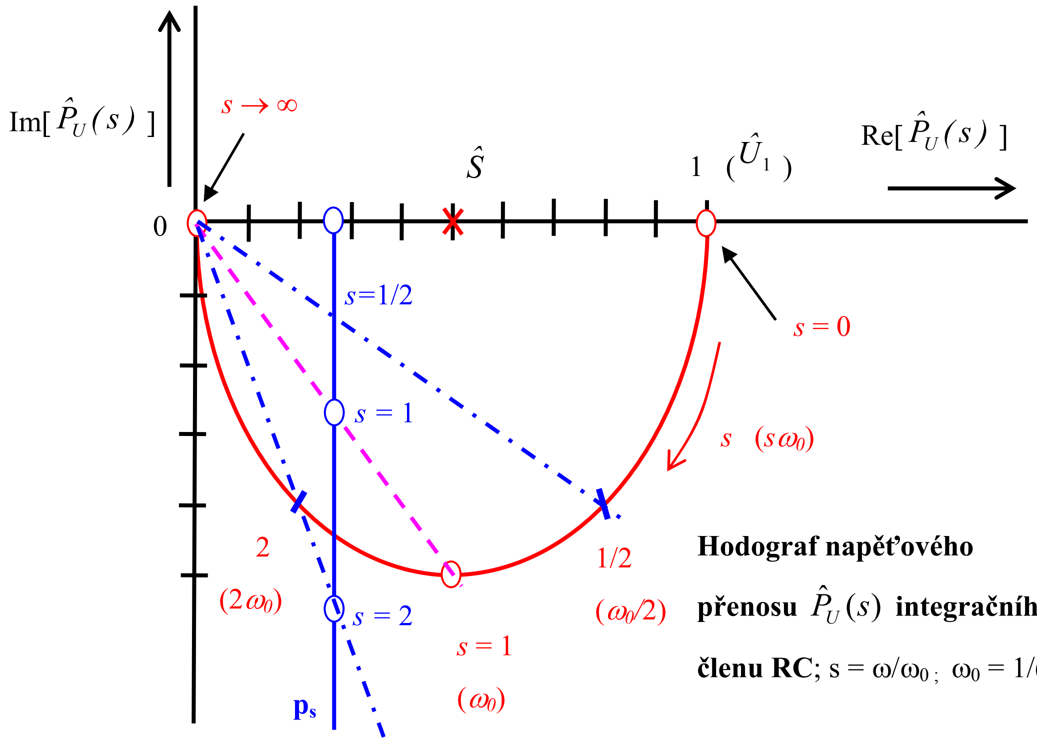
Změnu kmitočtu lze definovat výhodně vztahem (parametr přeznačíme pro změny kmitočtu na s) $\omega = s \cdot \omega_0$, takže vztah nabývá podoby *(za tento vztah 1 bod)*

$$\hat{U}_2(\omega) = \hat{U}_1 /(1 + js\omega_0 CR)$$

Nyní již platí pro konstrukci hodografů vše, co bylo uvedeno. Situaci vhodně normujeme, volíme $\omega_0 . C.R = 1$. Potom vztažná hodnota je $\omega 0 = 1/(C.R) = 1/\tau$, kde ω0 je **charakteristický kmitočet** obvodu, τ je **časová konstanta** obvodu.

Za vztažnou hodnotu pro výstupní napětí volíme napětí vstupní a tím vlastně definujeme **napěťový přenos** $\hat{P}_U$: $\hat{P}_U = \hat{U}_2(\omega)/\hat{U}_1 = 1/(1+js)$, kde s = ω/ω0 a ω0 = 1/(*C.R*) - *za tento vztah 2 body.*

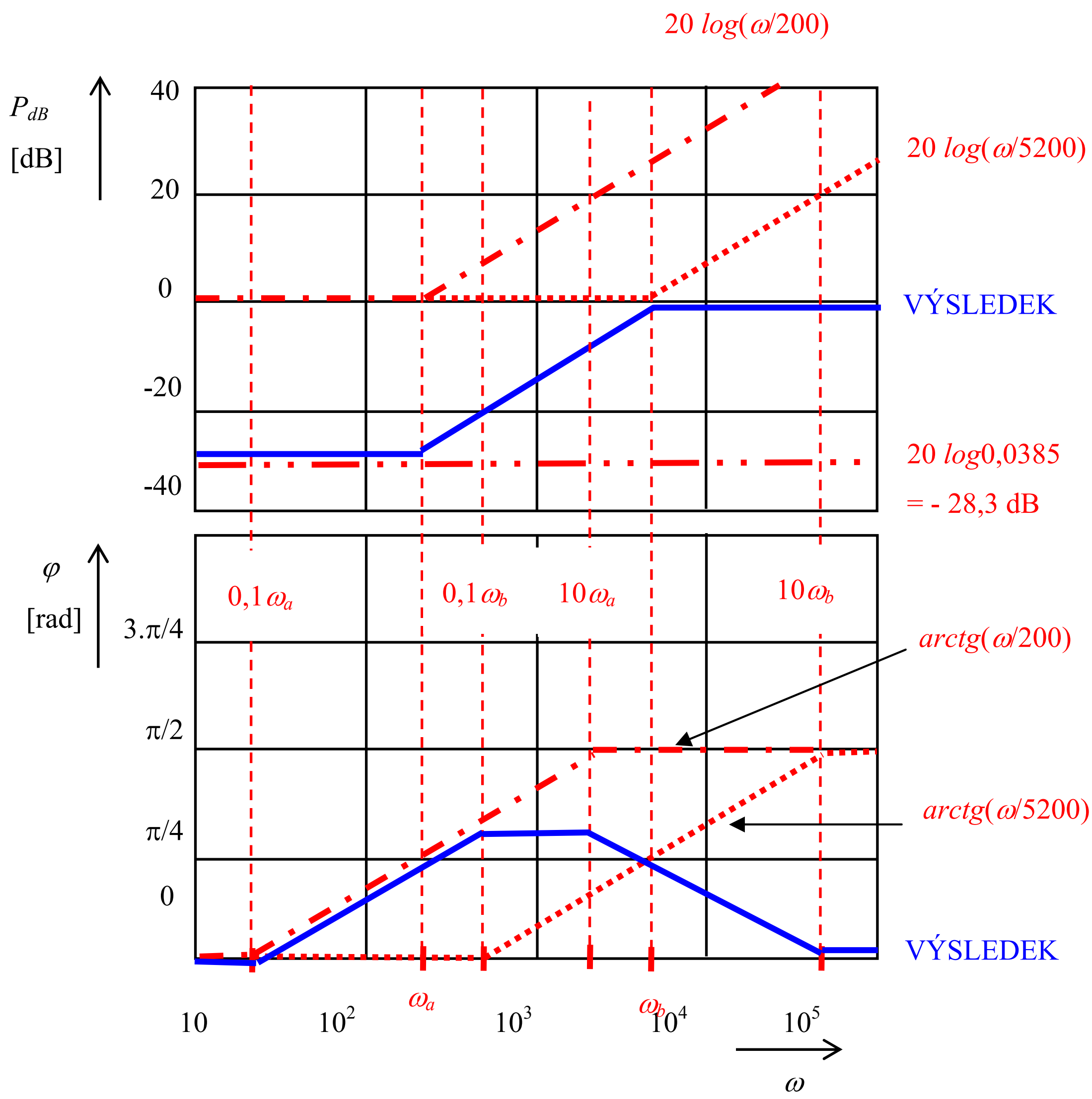
Konstrukce hodografu $\hat{P}_U$ je zachycena kvalitativně na obrázku [s = 0 ⇒ $\hat{P}_U$ (0) = 1; s = 1 ⇒ $\hat{P}_U$ (4.1) = 1/(1+j) = 0,5 - j 0,5 = exp(-j45°)/$\sqrt{2}$; s → ∞ ⇒ $\hat{P}_U$ (∞) → 0; ps - vhodná parametrická přímka pro parametr s] - *za konstrukci 3 body.*



Hodograf napěťového přenosu $\hat{P}_U(s)$ integračního členu RC; s = ω/ω0 ; ω0 = 1/(*C.R*)

4. Jedná se o impedanční dělič, jehož napěťový přenos určíme běžným postupem: $\hat{P}_U = \hat{Z}_2/(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2)$ přičemž $\hat{Z}_1 = R_1/(1 + j\omega CR_1)$; $\hat{Z}_2 = R_2$. Upravováním musíme dosáhnout formálně výhodný tvar přenosu:

$\hat{P}_U = 0{,}0385(1 + j\omega/200)/(1 + j\omega/5200)$. Přenos obsahuje pouze jednu nulu [ωa = 1/τa = 1/(CR_1) = 200] a jeden pól [ωb = 1/τb =1/[*CR*1*R*2/(*R*1+ R_2)]= 5200]. "Konstanta" přenosu K = 0,0385. *Za stanovení těchto údajů jsou 2 body.*



Asymptotické charakteristiky obvodu z úkolu č. 4

Nyní již snadno určíme, že:

$$P_{UdB}(\omega) = 20\log 0{,}0385 + 20\log\left|1 + j\omega/200\right| - 20\log\left|1 + j\omega/5200\right|$$

$$\varphi(\omega) = arctg(\omega/200) - arctg(\omega/5200)$$

Máme-li vhodně konstruovat asymptotické charakteristiky, musí frekvenční osa obsahovat i kmitočty 0,1.200 = 20 a 10.5200 = 52000, aby byly přiměřeně zachyceny fázové poměry. Celé řešení je znázorněno na obrázku. Od asymptot odpovídajících kořenovému činiteli s kmitočtem $\boldsymbol{\omega_a}$ odečítáme (graficky) asymptoty odpovídající kmitočtu $\boldsymbol{\omega_b}$. V modulové charakteristice musíme přičítat i člen 20.log0,0385 = - 28,3 dB, který popisuje násobnou konstantu.

Autokontrola

Pokud jste získali z úloh k řešení alespoň **15** bodů, je možno přejít ke studiu dalšího tématu. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat úlohy k řešení.

Zadání samostatné práce č. 5:

1. Vypočtěte a zobrazte modulovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku impedančního děliče napětí tvořeného dvěma ideálními prvky, z nichž jeden z nich je vždy rezistor.

6. Zesílení, činitelé zesílení

Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl: Po prostudování textu této kapitoly budete umět:

- popsat princip zesílení signálu,
- stanovit činitel zesílení proudu, napětí a výkonu,
- vypočítat komplexní hodnoty zesílení,
- určit vstupní a výstupní imitace zesilovače,
- modelovat vstupní a výstupní imitace zesilovače paralelním a sériovým zapojením
- obvodových prvků,
- vymezit šířku pásma,
- posoudit účinnost zesilovače,
- rozlišit lineární a nelineární zkreslení signálu,
- vyhodnotit činitel celkového harmonického zkreslení.

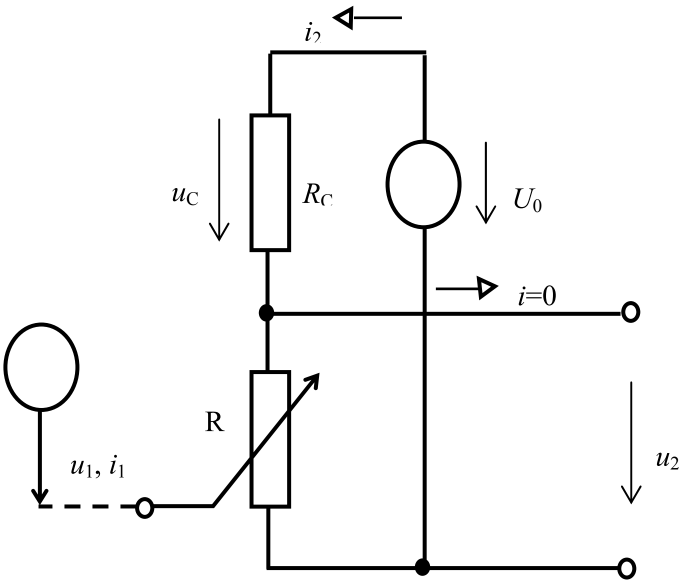
Výklad

6.1 Úvod

Zesilování signálů je jeden z nejčastějších a nejdůležitějších úkolů kladených na elektronické obvody. Zařízení zesilující signály nazýváme zesilovač, může být tvořen tranzistory, elektronkami a integrovanými strukturami.

6.2 Princip zesílení

Nejobvyklejší je zesilování v obvodech s elektricky řízenými nelineárními rezistory. Na obr.1 je uveden elementární obvod s řízeným rezistorem, který umožňuje, při vhodném výběru pracovního bodu, zesilování proudu, napětí a výkonu.



***Obr. 1** Principiální zapojení zesilovače*

Popis zapojení

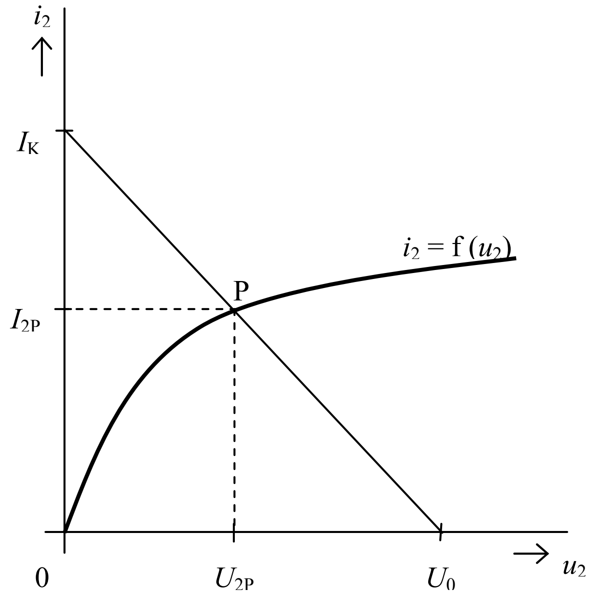
Nezávislý zdroj stejnosměrného napětí U_0 napájí sériové zapojení nelineárního rezistoru R, řízeného napětím u_1 nebo proudem i_1 a zátěže R_C, kterou může být rezistor nebo kmitavý obvod a nebo i složitější obvod. Vstupním signálem i_1, popř. u_1, je řízen (s vynaložením malého výkonu) odpor řízeného rezistoru, který určuje dodávku proudu i_2, a tedy i výkonu ze zdroje napětí U_0 do zátěže.

Zatěžovací charakteristika zdroje

Zatěžovací charakteristika zdroje je úsečka vymezená dvěma body: proudem nakrátko $I_K = \dfrac{U_0}{R_C}$ a napětím naprázdno U_0 obr. 2. Zatěžovací charakteristika zdroje je geometrickým místem pracovních bodů zesilovače.

Nastavení zatěžovacího bodu

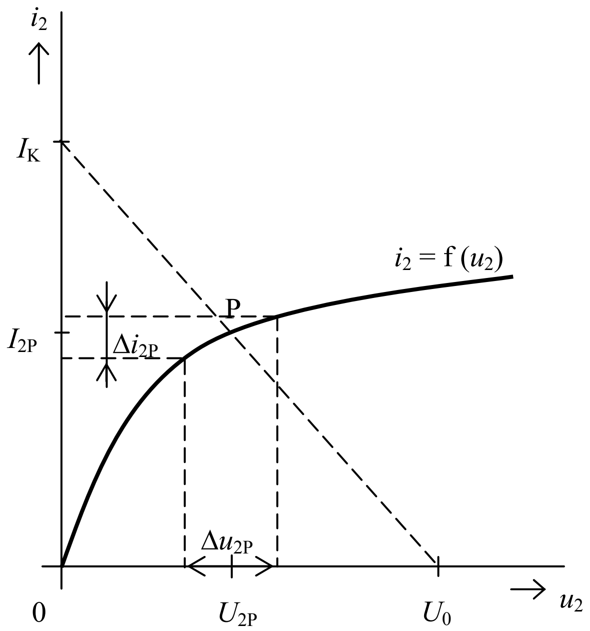
Pracovní bod zesilovače P je vymezen průsečíkem charakteristiky nelineárního rezistoru $i_2 = \mathrm{f}\,(u_2)$ a zatěžovací charakteristiky zdroje, která je vymezena body U_0 (stavem naprázdno) a $I_K = \dfrac{U_0}{R_C}$ (stavem nakrátko) obr. 2.



***Obr. 2** Nastavení pracovního bodu*

Linearizace části nelineární charakteristiky

V blízkém okolí pracovního bodu můžeme s dostatečnou přesností nelineární charakteristiku linearizovat úsečkou, jejíž směrnici určíme podílem diferencí $\dfrac{\Delta i_{2P}}{\Delta u_{2P}}$ (obr. 3).



***Obr: 3** Linearizace nelineární charakteristiky*

Obvodové veličiny

Obvodové veličiny vyjadřujeme součtem (superpozicí) dvou složek: stejnosměrné (obvykle jsou označovány písmeny velké abecedy s indexem DC) a střídavé (označujeme je písmeny malé abecedy), např.

$$i_2 = I_{2\mathrm{DC}} + \Delta i_2 \quad , \qquad u_2 = U_{2\mathrm{DC}} + \Delta u_2$$

6.3 Definice činitelů zesílení

Zesilovací vlastnosti jsou charakterizovány činiteli zesílení, definujeme je pro malé změny signálů v linearizované oblasti charakteristiky.

Činitel zesílení proudu

Změna Δi_1 vstupního proudu i_1 vyvolá změnu Δi_2 výstupního proudu i_2. Činitel zesílení proudu definujeme podílem

$$\frac{\Delta i_2}{\Delta i_1} = \mathrm{a}_i$$

Činitel zesílení napětí

Změna Δu_1 vstupního napětí u_1 vyvolá změnu Δu_2 výstupního napětí u_2. Činitel zesílení napětí definujeme podílem

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \mathrm{a}_u \,.$$

Činitel zesílení výkonu

Činitel zesílení výkonu definujeme součinem činitele zesílení proudu a napětí

$$\mathrm{a}_i \cdot \mathrm{a}_u = \frac{\Delta i_2}{\Delta i_1} \cdot \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \mathrm{a}_p$$

6.4 Komplexní hodnoty činitelů zesílení

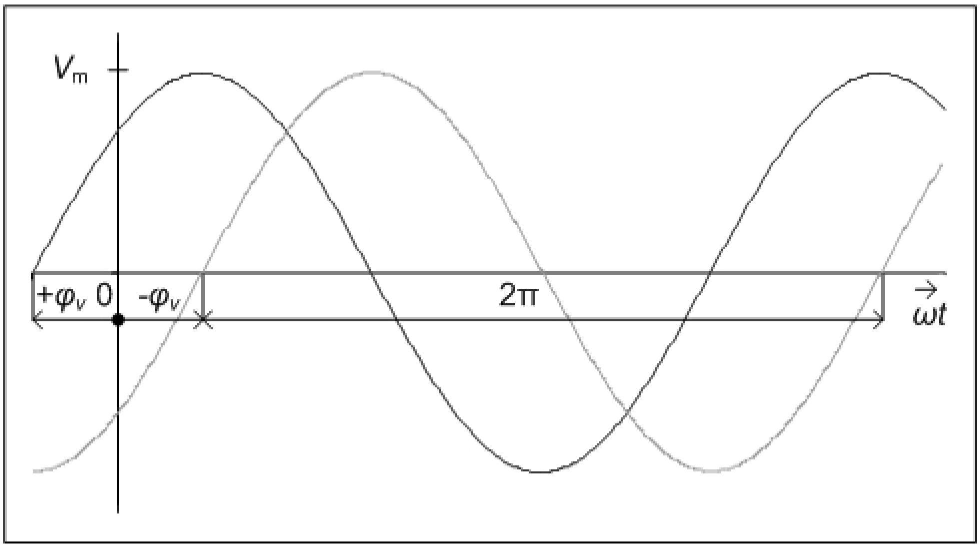
Harmonický průběh veličiny v ,který analyticky vyjadřujeme výrazem

$$v = V_\mathrm{m} \sin(\omega t \pm \varphi_u) = \sqrt{2} V \sin(\omega t \pm \varphi_u) \,,$$

zobrazujeme grafem (obr. 4) a reprezentujeme složeným (komplexním) číslem v exponenciálním tvaru

$$v \to V e^{\pm \mathrm{j} \varphi_v} \,,$$

kde V_m je amplituda a V efektivní hodnota veličiny.



Obr. 4 *Harmonický průběh veličiny*

Pro harmonické buzení v oblasti linearizované části nelineární charakteristiky můžeme s dostatečnou přesností považovat i odezvu harmonickou,tj.

pro $\Delta i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \varphi_{i1})$ uvažovat i $\Delta i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \varphi_{i2})$,

pro $\Delta u_1 = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \varphi_{u1})$ uvažovat i $\Delta u_2 = \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + \varphi_{u2})$

a definovat komplexní hodnoty činitelů zesílení pro jednu hodnotu úhlového kmitočtu ω.

- **Komplexní hodnota činitele zesílení proudu**

Je definována podílem komplexních hodnot proudu výrazem

$$\hat{A}_I = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \frac{I_2 \cdot e^{j\varphi_{i2}}}{I_1 \cdot e^{j\varphi_{i1}}} = \frac{I_2}{I_1} \cdot e^{j\varphi_i}$$

- **Komplexní hodnota činitele zesílení napětí**

Je definována podílem komplexních hodnot napětí výrazem

$$\hat{A}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{U_2 \cdot e^{j\varphi_{u2}}}{U_1 \cdot e^{j\varphi_{u1}}} = \frac{U_2}{U_1} \cdot e^{j\varphi_u}$$

- **Komplexní hodnota činitele zesílení výkonu**

Je definována součinem komplexních hodnot proudu a napětí výrazem

$$\hat{A}_P = \hat{A}_I \cdot \hat{A}_U = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1} e^{j(\varphi_i + \varphi_u)} = \frac{\hat{P}_2}{\hat{P}_1}$$

6.5 Komplexní hodnoty imitancí

Imitance definujeme pro harmonické průběhy obvodových veličin podílem jejich komplexních hodnot. Imitance je společný termín pro admitanci a impedanci.

Vstupní imitance

Podílem komplexní hodnoty proudu a napětí na vstupu definujeme komplexní hodnotu vstupní admitance

$$\hat{Y}_1 = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} \quad ,$$

Podílem komplexní hodnoty napětí a proudu na vstupu definujeme komplexní hodnotu vstupní impedance

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} \quad .$$

Výstupní imitance

Obdobně definujeme výstupní admitanci

$$\hat{Y}_2 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2} \quad ,$$

a výstupní impedanci

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} \quad .$$

Obvodové modely imitancí

Komplexní hodnota imitance ve složkovém tvaru vyjadřuje reálnou a imaginární část imitance. Reálnou část modelujeme rezistorem a imaginární část buď induktorem (když proud je zpožděn za napětím) nebo kapacitorem (když proud předbíhá napětí) .

Admitanci modelujeme paralelním modelem a impedanci seriovým modelem.

6.6 Frekvenční charakteristiky činitelů zesílení

Frekvenční charakteristiky jsou množinou komplexních hodnot činitelů zesílení pro různé hodnoty úhlových kmitočtů. Tyto diskrétní hodnoty zobrazíme buď v rovině komplexních čísel body, které proložíme (extrapolujeme) grafy a analyticky je popíšeme komplexními funkcemi reálné proměnné $\omega : \hat{A}_I(\omega)$, $\hat{A}_U(\omega)$ a $\hat{A}_P(\omega)$, nebo v semilogaritmických souřadnicích samostatně zobrazíme jejich modulové charakteristiky

$$\left|\hat{A}_I(\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log \frac{I_2}{I_1} \quad , \quad \left|\hat{A}_U(\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20 \cdot \log \frac{U_2}{U_1} \quad , \quad \left|\hat{A}_P(\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 10 \cdot \log \frac{P_2}{P_1}$$

a fázové charakteristiky

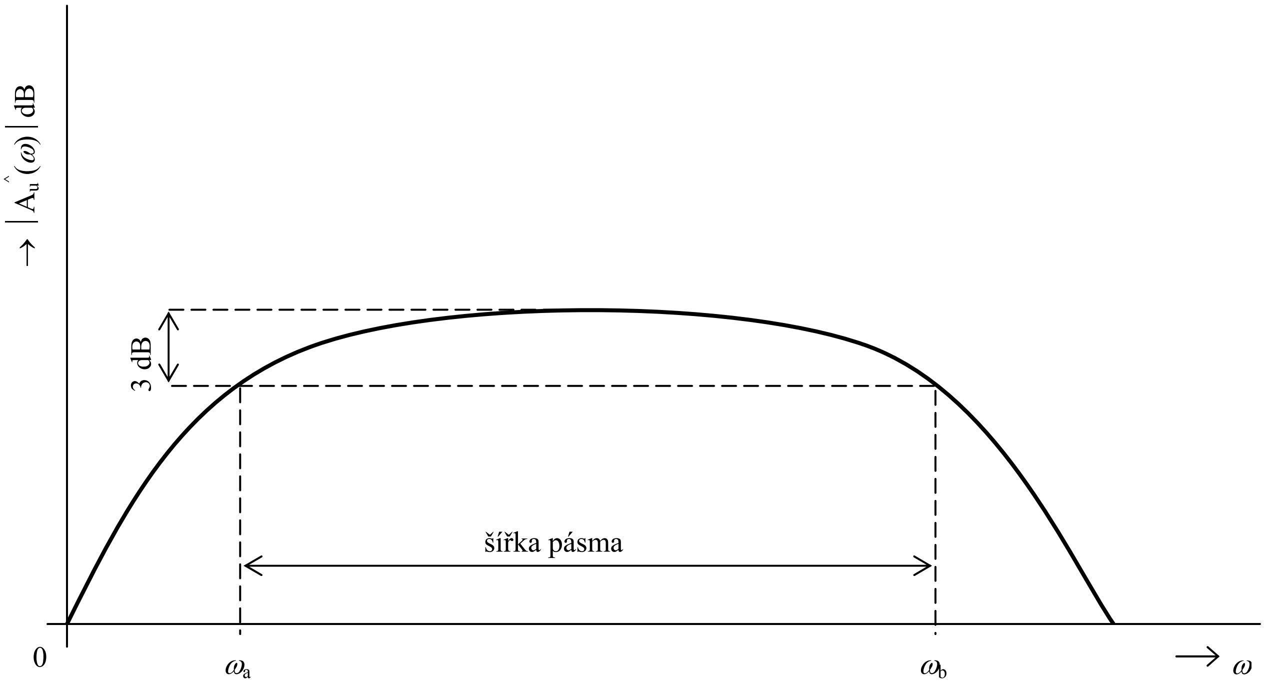
$$\varphi_i(\omega) = \varphi_{i2}(\omega) - \varphi_{i1}(\omega) \text{ …..atd.}$$

6.7 Lineární zkreslení výstupních veličin

Od zesilovačů požadujeme, aby nezkreslovaly, tj. aby okamžité hodnoty výstupního proudu a napětí byly přímo úměrné okamžitým hodnotám proudu a napětí na vstupu. To bude splněno, bude-li každá harmonická složka vstupního signálu zesílena stejně a budou-li zachovány fázové posuny mezi těmito složkami, tj. když zesilovač nemá ani modulové (amplitudové) ani fázové zkreslení. Pak kmitočtová odezva výstupního proudu či napětí má modulovou charakteristiku úsečku rovnoběžnou s osou kmitočtu, stejně tak i fázová charakteristika. U skutečných zesilovačů jsou tyto podmínky splněny jen přibližně a to jen v jistém intervalu kmitočtu.

6.8 Šířka pásma

Šířka pásma je definována na kmitočtové modulové charakteristice rozdílem kmitočtů $\omega_b - \omega_a$, které vymezují pokles výkonu signálu na $\frac{1}{2}$ jeho maximální hodnoty, tj. pokles napětí signálu na $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jeho největší hodnoty, což je v jednotkách dB pokles o -3 dB, viz obr. 5.



Obr. 5 *Frekvenční charakteristika absolutní hodnoty modulu zesílení napětí s vymezením šířky pásma*

6.9 Řídicí charakteristika

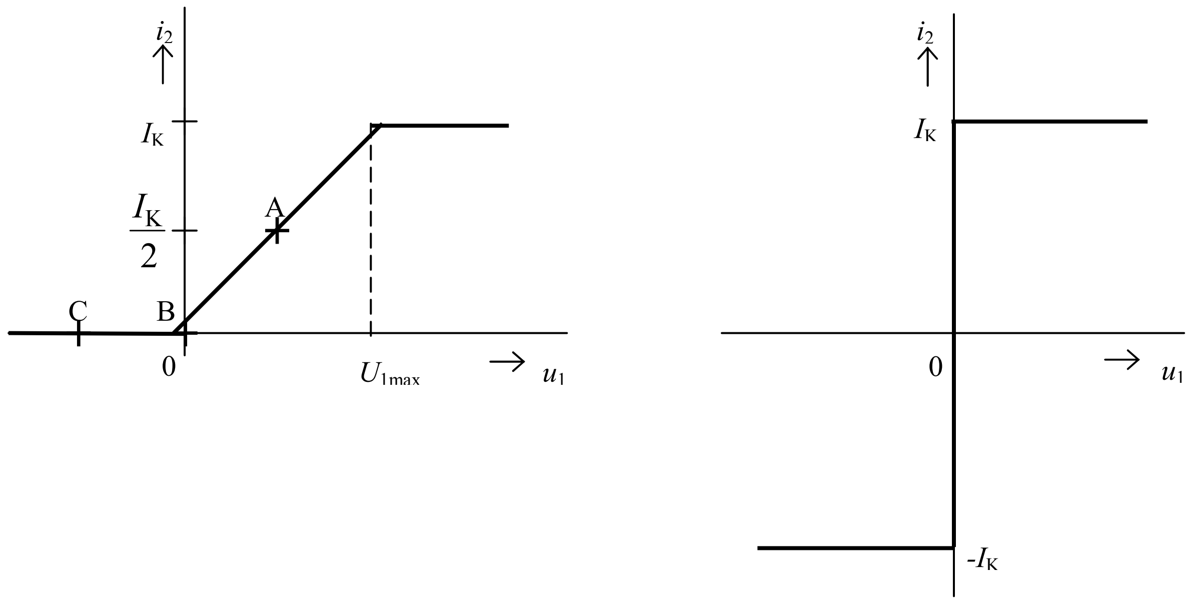
Řídicí charakteristika udává závislost výstupního proudu i_2 na vstupním napětí u_1, tj. $i_2 = \mathrm{f}\,(u_1)$. Podle nastavení pracovního bodu na řídící charakteristice obr. 6 rozeznáváme tři základní třídy zesilovačů:

- třída A - (nejrozšířenější), pracovní bod nastavujeme na polovinu hodnoty proudu nakrátko, zesiluje po celou dobu periody - nezkresluje, účinnost přeměny energie napájecího stejnosměrného zdroje na energii zesilovaného signálu až 25 %, zbytek energie dodané stejnosměrným zdrojem se přemění na teplo, které zvyšuje provozní teplotu zesilovače,
- třída B – pracovní bod nastavujeme do stavu naprázdno (do nulové hodnoty proudu) zesiluje po dobu poloviny periody - zkresluje, účinnost až 78 %,

- třída C – pracovní bod nastavujeme na zápornou hodnotu vstupního napětí, zesiluje po dobu kratší polovině periody - zkresluje, účinnost až 100 %

a jednu speciální:

- třída D – pracuje ve spínacím režimu, účinnost 100 %.



Obr. 6 *Řídicí charakteristiky zesilovače: a) třída A, B, C; b) třída D.*

6.10 Nelineární zkreslení výstupních veličin

Nelineární zkreslení veličin je způsobeno nelineární charakteristikou obvodového prvku, kterou jsme pro názornost výkladu definic činitelů zesílení neuvažovali. Nelineární zkreslení je charakteristické obohacením zesilované veličiny o kmitočty, které nejsou obsaženy v budící veličině. Pro buzení harmonickou veličinou určíme časový průběh zkreslení v_z odečtením její vlastní harmonické v_1 od časového průběhu veličiny v podle rovnice

$$v_z = v - v_1 \ .$$

Pro efektivní hodnotu zkreslení V_z platí vztah

$$V_z = \sqrt{V^2 - V_1^2} \ .$$

6.11 Celkový činitel harmonického zkreslení

Celkový činitel harmonického zkreslení (total harmonic distortion – THD, viz norma ČSN EN 61 800 - 3) je definován podílem efektivní hodnoty zkreslení veličiny V_z a efektivní hodnoty veličiny V, udává se v procentech

$$\mathrm{THD} = 100 \cdot \frac{V_z}{V} \quad (\ \%\ ) \ .$$

6.12 Saturace zesilovače

Hodnota proudu zesilovače závisí na velikosti budícího signálu. Je-li budícím signálem dosaženo maximálně možné hodnoty proudu zesilovače, nazýváme tento pracovní stav saturací zesilovače. Zesilovače třídy D pracují v saturaci.

6.13 Účinnost zesilovače

Účinnost zesilovače je definována podílem činného výkonu zesíleného signálu zátěže a činného výkonu dodávaného stejnosměrným zdrojem.

6.14 Shrnutí

Zesilování signálu je realizováno zesilovačem, který malým výkonem vstupního signálu řídí dodávku velkého výkonu stejnosměrného zdroje. Zesilovací vlastnosti posuzujeme kmitočtovými charakteristikami činitele zesílení proudu, napětí , výkonu a zkreslením signálu. Přeměnu dodávané energie stejnosměrného zdroje na zesilovaný signál posuzujeme účinností. Podle nastavení pracovního bodu na řídicí charakteristice rozlišujeme třídy zesilovačů. Podle hodnoty vstupní a výstupní imitace realizujeme buď proudové, nebo napěťové, nebo výkonové přizpůsobení zesilovače k vnějším obvodům.

Text k prostudování

[1] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů 2. Skriptum ČVUT Praha 2004. Kapitola 4.

Další studijní texty

[2] Mayer,D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1998.Kapitola 5.4.

Příklady

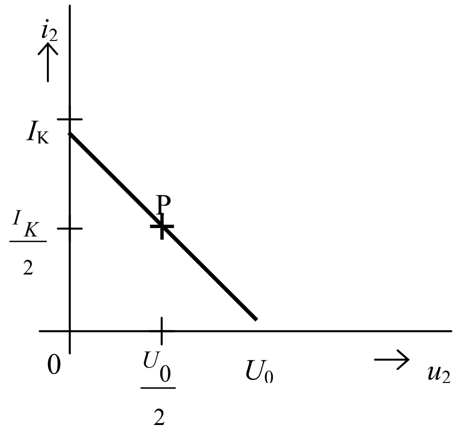
1. Sestrojte zatěžovací charakteristiku zdroje pro pracovní bod $P \equiv (4{,}5\,\mathrm{V}, 3\,\mathrm{mA})$ zesilovače třídy A, určete hodnoty napětí stejnosměrného zdroje a zatěžovacího odporu.

Řešení:

Zatěžovací charakteristika zdroje je vždy jednoznačně vymezená napětím naprázdno a proudem nakrátko. Pro zesilovač tř. A nastavujeme pracovní bod uprostřed zatěžovací charakteristiky to znamená, že napětí naprázdno U_0 je dvojnásobkem napětí pracovního bodu, tj. $U_0 = 9\,\mathrm{V}$, rovněž proud nakrátko je dvojnásobkem proudu pracovního bodu, tj. $I_\mathrm{K} = 6\,\mathrm{mA}$.

Z těchto hodnot sestrojíme zatěžovací charakteristiku zdroje (obr.7) a určíme hodnotu rezistoru

$$R_C = \frac{U_0}{I_\mathrm{K}} = \frac{9}{6 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5\ \mathrm{k\Omega}$$



Obr. *7 Zatěžovací charakteristika zdroje*

2. Sestrojte převodní charakteristiku zesilovače se strmostí $Y_{21} = 0{,}02\,\mathrm{S}$ (Siemensů) v podmínkách zadání příkladu 1.

Řešení:

Převodní charakteristika zesilovače ve třídách A,B,C $i_2 = \mathrm{f}\,(u_1)$ (obr.6a) je graficky zobrazena úsečkou se směrnicí rovnající se strmostí v intervalu proudu 0 až I_K, ostatní části převodní charakteristiky mají nulovou směrnici, přičemž spojitě navazují na úsečku s nenulovou směrnicí – k její konstrukci určíme mezní hodnotu vstupního napětí $U_{1\,\mathrm{max}}$ odpovídající proudu nakrátko

$$U_{1\,\mathrm{max}} = \frac{I_\mathrm{K}}{Y_{21}} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}} = 300\,\mathrm{mV} \quad .$$

3. Určete hodnotu amplitudy vstupního střídavého napětí, při které nastane saturace zesilovače ve třídě A a ve třídě B

Řešení:

Ve třídě A vede zesilovač po celou dobu periody střídavého signálu, tj. musí být splněna rovnost $2 \cdot U_{1\mathrm{m}} = U_{1\max} \;\Rightarrow\; U_{1\mathrm{m}} = 0{,}5\,U_{1\max}$.

Zesilovač třídy B zesiluje právě kladné hodnoty signálu, proto saturace nastane při amplitudě

$$U_{1\mathrm{m}} = U_{1\max} \ .$$

4. Odvoďte vztah pro výpočet účinnosti zesilovače tř. A.

Řešení:

Účinnost zesilovače je podílem činného výkonu zátěže P_C a činného výkonu napájecího zdroje P_0

$$\eta = \frac{P_\mathrm{C}}{P_0}$$

Činný výkon zátěže je definován výrazem $P_\mathrm{C} = R_\mathrm{C} I_2^2 = U_\mathrm{C} I_2$,

kde I_2 je efektivní hodnota střídavého proudu zátěže.

Činný výkon zdroje je součinem hodnoty napájecího napětí a poloviny hodnoty proudu nakrátko $P_0 = 0{,}5 \cdot U_0 I_\mathrm{K}$.

5. Stanovte hodnotu účinnosti v předchozím příkladu za podmínky maximálního vybuzení harmonickým signálem.

Řešení:

Amplituda napětí zátěže U_{Cm} je polovina napětí U_0 a amplituda proudu zátěže $I_{2\mathrm{m}}$ je polovina proudu nakrátko I_{K}. Efektivní hodnota harmonického průběhu je $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hodnoty amplitudy, proto účinnost

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{C}}}{P_0} = \frac{U_{\mathrm{C}} I_2}{0{,}5 \cdot U_0 I_{\mathrm{K}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} 0{,}5 \cdot U_0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0{,}5 \cdot I_{\mathrm{K}}}{0{,}5 \cdot U_0 I_{\mathrm{K}}} = 0{,}25 \quad .$$

Účinnost zesilovače je 25 %.

Otázky

1. Jak funguje zesilovač?

2. Co udává činitel zesílení: proudu, napětí?

3. Jak definujeme imitaci?

4. Uveďte obvodové modely imitací!

5. Proč vzniká nelineární zkreslení veličin?

6. Co udává celkový činitel harmonického zkreslení?

7. Za jakých podmínek nastane saturace zesilovače?

8. Rozlište třídy zesilovače A, B, C, D!

9. Slovně vymezte účinnost zesilovače!

10. Jak definujeme šířku pásma?

Odpovědi na otázky naleznete v této studijní opoře.

Autokontrola

Pokud jste správně odpověděli alespoň na pět otázek, je možno přejít ke studiu jiných témat. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.

Zadání samostatné práce č. 6:

1. Uveďte schéma zapojení derivačního, integračního a invertujícího zesilovače s ideálním operačním zesilovačem a popište jejich přenosovou funkci $u_2 = f(u_1)$, průběhy obou napětí zobrazte pomocí virtuální laboratoře.

7. Obvody s rozprostřenými parametry. Odvození obecných rovnic jednofázového homogenního vedení, primární a sekundární parametry

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vymezit pojem „obvod s rozprostřenými parametry“
- odvodit obecné rovnice homogenního vedení.

Výklad

7.1 Úvod - definice pojmu „obvody s rozprostřenými parametry“

U obvodů, jimiž jsme se zatím zabývali jsme předpokládali, že se elektrické veličiny (především proud a napětí) mohou měnit v závislosti na čase, ale nikoliv, nebo jen zanedbatelně málo, v závislosti na prostorových souřadnicích. Takové obvody nazvěme obvody se soustředěnými (koncentrovanými parametry. V nich mají elektrické veličiny ve všech bodech daného obvodu stejné hodnoty. Závislost změny obvodových veličin na prostorových souřadnicích však nemůžeme zanedbat ve všech případech. Obvody, kde toto nelze provést nazvěme obvody s rozprostřenými parametry. Měřítkem, podle něhož uvedenou klasifikaci provádíme je poměr délky vedení a délky elektromagnetické vlny, šířící se v obvodu, kterou vypočteme ze známého vztahu:

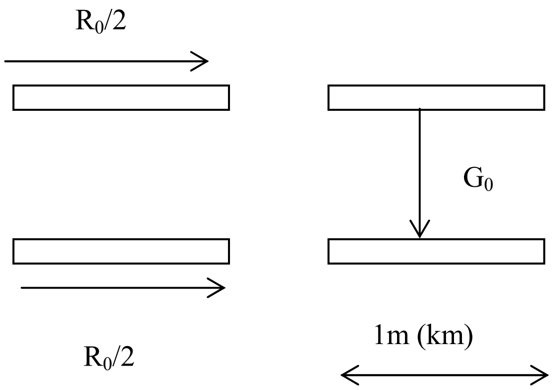
$$\lambda = v/f \qquad (1)$$

U elektrických zařízení jejichž rozměry jsou větší, stejné nebo porovnatelné s délkou elektromagnetické vlny bychom v obecném případě nemohli využít vztahy využívané v teorii obvodů a museli bychom provádět analýzu elektrických poměrů v takovém zařízení postupy, používanými více v oblasti elektrotechniky, nazývané teorie elektromagnetického pole (základem jsou Maxwellovy rovnice). Situace je ale jednodušší v případech, kdy u zmíněného zařízení převládá jeden rozměr – např. u dvojvodičového vedení, ať již dvojlinky nebo koaxiálního kabelu. V těchto případech je příčný rozměr, tj. vzdálenost vodičů od sebe zanedbatelný vůči délce vedení. Takováto vedení nazýváme elektricky dlouhými nebo stručně dlouhými vedeními. Takovéto vedení pak můžeme analyzovat jako obvod, sestaven z parametrů R, L, G, a C, které jsou spojitě rozloženy po vedení Odtud vedení také nazýváme jako vedení s rozprostřenými parametry. Respektujeme tím jednak rovnoměrné ztráty podél vedení a také rovnoměrné rozložení elektrické energie akumulované v kapacitách a magnetické energie akumulované v indukčnostech.

7.2 Primární a sekundární parametry

Vedení s rozprostřenými parametry je jednoznačně charakterizováno čtyřmi parametry, které nazýváme jako primární – měrný odpor, měrný svod, měrná indukčnost a měrná kapacita. Měrný odpor R_0 [Ω/m] je činný odpor obou vodičů vedení o jednotkové délce, Měrný svod G_0 [S/m] je reciproká hodnoty odporu dielektrika mezi oběma vodiči v příčném směru vedení jednotkové délky a měrná kapacita C_0 [F/m] je kapacita mezi oběmi vodiči tvořícími dlouhé vedení a měrná indukčnost L_0 [H/m] je vlastní indukčnost dvojvodičového vedení jednotkové délky. Zde jsou uvedeny jednotky na

1m, častěji se vztahují na 1km. Vymezení těchto pojmů přibližuje *obr. 1*, s jednotkovým úsekem vedení (např. 1m nebo 1 km).

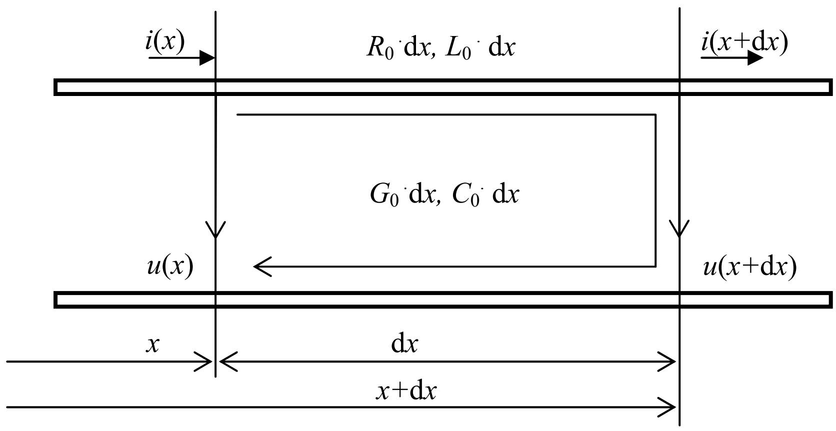


***Obr. 1** Znázornění významů primárních parametrů*

Uvedené primární parametry se mohou podél vedení měnit spojitě nebo nespojitě. V případě nespojité změny se popisuje vedení rovnicemi jako vedení po částech spojité (homogenní). V této kapitole nás ale budou zajímat vedení homogenní, které mají podél celého vedení primární parametry konstantní. Navíc se budeme zajímat o vedení s rozloženými parametry lineární, tj. takové, u něhož nezávisí velikost primárních parametrů na proudu, resp. napětí.

7.3 Přenosové rovnice pro popis poměrů vedení s rozloženými parametry

Tato kapitola se zabývá změnou poměrů, tj. polních a obvodových veličin podél vedení s rozloženými parametry. Pro odvození základní rovnice budeme uvažovat homogenní dvojvodičové, jehož krátký úsek délky d*x* je na *obr. 2*.



***Obr. 2** Elementární úsek vedení s rozloženými parametry*

Parametry elementárního úseku budou úměrné délce tohoto elementu d*x* a měrným parametrům: R0.d*x*, L0.d*x*, G0.d*x*, C0.d*x*, Předpokládejme, že na začátku proudového elementu, tedy na souřadnici *x* je velikost proudu i(*x*) a velikost napětí u(*x*). Přírůstky takovýchto funkcí proudů a napětí na velmi malých úsecích *dx* nahradit totálními diferenciály

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \qquad (2) \qquad\qquad di = \frac{\partial i}{\partial x} dx \qquad (3)$$

Na konci elementu. tj. na souřadnici (x + dx) získáme hodnoty proudu a napětí podle Tailorovy věty tak, že derivace vyššího než prvního řádu s vědomím přijatelné nepřesnosti zanedbáme

$$i(t,x+dx) = i(t,x) + \frac{\partial i}{\partial x} dx \qquad (4) \qquad u(t,x+dx) = u(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \qquad (5)$$

Použitím Kirchhofova zákona pro smyčku:

$$- u + R_0.dx.i + L_0.dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \qquad (6)$$

a pro uzel

$$- i + G_0.dx.u + C_0.dx \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx = 0 \qquad (7)$$

získáváme rovnice, z nichž každá zahrnuje obě proměnné – proud i napětí jako funkce času a souřadnice x.. Upravíme je do tvaru:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(R_0.i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \right) \qquad (8) \qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -\left(G_0.u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \qquad (9)$$

Jedná se o soustavu dvou diferenciálních rovnic 1.řádu, z nichž odvodíme parciální diferenciální rovnice 2. řádu, z nichž jedna bude zahrnovat jako proměnnou jen napětí, druhá jen proud. Provedeme to tak, že derivací druhé rovnice podle x a dosazením do první dostáváme diferenciální rovnici pro proud, zatímco derivací první rovnice a dosazením do druhé dostáváme diferenciální rovnice pro napětí. Matematický zápis tohoto postupu:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} \qquad (10) \qquad -\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = G_0 \frac{\partial u}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \qquad (11)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = R_0 \frac{\partial i}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad (12) \qquad -\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = G_0 \frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (13)$$

a dále

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 G_0.u + (L_0 G_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} + L_0 C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_0 G_0.i + (L_0 G_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i}{\partial t} + L_0 C \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad (15)$$

Je zvykem nazývat tyto rovnice termínem telegrafní rovnice, protože byly odvozeny pro matematický popis šíření telegrafních signálů. Jejich řešením zjistíme velikost napětí a proudů v kterémkoliv místě x a v kterémkoliv čase t, a to pro libovolný průběh napájecího napětí.

Při odvození obvodových rovnic bychom mohli vyjít také z Maxwellových rovnic pro polní veličiny **E** a **B**, které mají tvar:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (16) \qquad \text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (17)$$

V těchto rovnicích je použit symbol γ pro specifickou vodivost. V následující kapitole bude mít význam jiný. Pro jednorozměrný případ, kdy se pole mění jen se změnou souřadnice x lze tyto rovnice přepsat

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (18) \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (19)$$

Spojme tyto polní veličiny s veličinami obvodovými - napětím a proudem. Napětí je dáno křivkovým integrálem **E** po libovolné křivce mezi vodiči. Indukce **B** celkovému odpovídá celkovému toku mezi vodiči. Ze statické definice indukčnosti

$$\Phi = L_0.dx.i. \qquad (20)$$

Podle rovnice (2) je přírůstek (úbytek) napětí na dx roven totálnímu diferenciálu

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}.dx = \int \mathbf{E}\, d\xi = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_0 \frac{di}{dt} dx \qquad (21)$$

potom $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}$ (22)

Podobně lze převést rovnice (19) pomocí křivkového integrálu **H** kolem vodiče, který dává celkový proud i. Proudovou hustotu na pravé straně rovnice přitom převádíme na celkový příčný proud daný součinem $G0.u$. Podobně i celkový posuvný proud je dán vztahem $C0 \dfrac{\partial u}{\partial t}$. Za těchto podmínek přejde vztah (19) na rovnici

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\left(G_0.u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}\right) \qquad (23)$$

Vliv odporu R_0 se projeví na pravé straně rovnice (21) úbytkem

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = -\, r\mathrm{k}.dx.i \qquad (24)$$

takže

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(R_0.i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}\right) \qquad (25)$$

Dosadíme do (4) a (5)

$$i(t,x+dx) = i(t,x) - G_0.u.dx - C_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx \quad (26) \qquad u(t,x+dx) = u(t,x) - R_0.i.dx - L_0 \frac{\partial i}{\partial t} dx \quad (27)$$

7.4 Obvodové rovnice pro harmonické napájení vedení

U vedení s rozprostřenými parametry napájenými z harmonických zdrojů využíváme symbolicko-komplexní metodu. V podstatě lze v tomto případě všechny rovnice z předcházejícího odstavce přepsat tak, že časové derivace zaměníme vynásobením konstantou jω a obecně časově závislé proměnné přeznačíme jako fázory. Takže rovnice (8) a (9) mají tvar:

$$-\frac{d\hat{U}}{dx} = R_0 \hat{I} + j\omega L_0 \hat{I} = \left(R_0 + j\omega L_0\right)\hat{I} \qquad (28a)$$

$$-\frac{d\hat{I}}{dx} = G_0 \hat{U} + j\omega C_0 \hat{U} = \left(G_0 + j\omega C_0\right)\hat{U} \qquad (28b)$$

kde $\hat{U}$ a $\hat{I}$ jsou komplexní efektivní hodnoty, které jsou již jen funkcí souřadnice x, a v čase jsou konstantní. Z matematického hlediska to má obrovský význam, neboť jsme zjednodušili problém tím, že jsme parciální diferenciální rovnice nahradili obyčejnými diferenciální rovnicemi. Pro efektivní hodnoty proudů a napětí.

Dlouhá vedení, která lze chápat jako vedení s rozloženými parametry si často nahrazujeme kaskádně řazenými T, Π nebo Γ články – tedy kaskádně řazenými dvojbrany, nahrazujícími elementy vedení délky dx. Potom ale můžeme označit veličinu

$$\hat{z}=R_0 + j\omega L_0$$

jako podélnou měrnou impedanci, a veličinu

$$\hat{y}=G_0 + j\omega C_0$$

jako příčnou měrnou admitanci vedení s rozloženými parametry. Obě veličiny jsou pochopitelně vztaženy na jednotku délky, např. Ω/m, Ω/km, S/m, S/km. Dosazením vztahů do (28) dostáváme

$$\frac{d\hat{I}}{dx} = -\hat{y}\hat{U} \qquad (29) \qquad\qquad \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = -\hat{z}\hat{I} \qquad (30)$$

Derivujme (29) a dosaďme do ní (30):

$$-\frac{d^2\hat{U}}{dx^2} = \hat{z}\frac{d\hat{I}}{dx} = -\hat{z}\hat{y}\hat{U} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\hat{U}}{dx^2} - \hat{z}\hat{y}\hat{U} = 0 \qquad (31)$$

V každé rovnici je tedy pouze jedna proměnná U, získali jsme tedy homogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty s charakteristickou rovnicí

$$\alpha^2 - \hat{z}\hat{y} = 0 \qquad (32)$$

a s komplexními kořeny této charakteristické rovnice

$$\hat{\alpha}_{1,2} = \pm\sqrt{\hat{z}\hat{y}} = \pm\hat{\gamma} \qquad (33)$$

Zavedli jsme velmi důležitou veličinu γ, kterou nazveme činitel šíření. Je rovněž vztažena na jednotku délky.

$$\hat{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \qquad (34)$$

Obecné řešení rovnice (31)

$$\hat{U}(x) = \hat{A}e^{\hat{\alpha}_1 x} + \hat{B}e^{\hat{\alpha}_2 x} = \hat{A}e^{\hat{\gamma} x} + \hat{B}e^{-\hat{\gamma} x} \qquad (35)$$

kde $\hat{A},\hat{B}$ jsou integrační konstanty závislé na okrajových podmínkách. Později provedeme jejich určení. Pro průběh proudu lze psát

$$\hat{I}(x) = -\frac{1}{\hat{z}}\frac{d\hat{U}}{dx} = -\frac{1}{\hat{z}}\hat{\gamma}\left(\hat{A}e^{\hat{\gamma} x} - \hat{B}e^{-\hat{\gamma} x}\right) = -\frac{1}{\hat{Z}_0}\left(\hat{A}e^{\hat{\gamma} x} - \hat{B}e^{-\hat{\gamma} x}\right) \qquad (36)$$

kde jsme opět zavedli vlnovou (obrazovou) impedanci dlouhého vedení

$$\hat{Z}_0 = \sqrt{\frac{\hat{z}}{\hat{y}}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \quad [\Omega] \tag{37}$$

Nyní vypočteme integrační konstanty $\hat{A}, \hat{B}$ za předpokladu, že známe hodnoty na začátku vedení, tj. pro $x = 0$: $\hat{U}(0) = \hat{U}_1$, $\hat{I}(0) = \hat{I}_1$, které dosadíme do vztahů (35) a (36). Dostáváme

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{U}_1$$

$$\hat{A} - \hat{B} = -\hat{Z}_0 \hat{I}_1$$

Řešením těchto rovnic dostaneme integrační konstanty vyjádřené známými hodnotami na počátku vedení

$$\hat{A} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_0 \hat{I}_1\right) \qquad \hat{B} = \tfrac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_0 \hat{I}_1\right)$$

Po dosazení do vztahů (35) a (36) a po úpravě dostáváme

$$\hat{U}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_0 \hat{I}_1\right) e^{-\hat{\gamma} x} + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_0 \hat{I}_1\right) e^{\hat{\gamma} x} \tag{37}$$

$$\hat{I}(x) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_1\right) e^{-\hat{\gamma} x} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_1\right) e^{\hat{\gamma} x} \tag{38}$$

V řadě případů je výhodnější použít tyto rovnice zapsány pomocí hyperbolických funkcí. Nejprve si vytkněme z rovnic $\hat{U}_1, \hat{I}_1$

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1 \frac{1}{2}\left(e^{\hat{\gamma} x} + e^{-\hat{\gamma} x}\right) - \hat{Z}_0 \hat{I}_1 \frac{1}{2}\left(e^{\hat{\gamma} x} - e^{-\hat{\gamma} x}\right) \tag{39}$$

$$\hat{I}(x) = \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} \frac{1}{2}\left(e^{\hat{\gamma} x} - e^{-\hat{\gamma} x}\right) + \hat{I}_1 \frac{1}{2}\left(e^{\hat{\gamma} x} + e^{-\hat{\gamma} x}\right) \tag{40}$$

Vzhledem k platnosti Eulerových vztahů můžeme psát

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1 \cosh \hat{\gamma} x - \hat{Z}_0 \hat{I}_1 \sinh \hat{\gamma} x \tag{41}$$

$$\hat{I}(x) = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} \sinh \hat{\gamma} x + \hat{I}_1 \cosh \hat{\gamma} x \tag{42}$$

Rovnice (37), (38), (41), (42) umožňují zjistit komplexní efektivní hodnoty napětí a proudů ve kterémkoliv místě x, známe-li jejich hodnoty na počátku a sekundární parametry vedení s rozloženými parametry $\hat{Z}_0, \hat{\gamma}$. Tyto sekundární parametry lze určit z parametrů primárních.

Dosadíme-li do rovnic (41) a (42) za x délku vedení l, dostaneme hodnoty napětí a proudů na konci vedení

$$x = l \qquad \hat{U}(x) = \hat{U}(l) = \hat{U}_2 \qquad \hat{I}(x) = \hat{I}(l) = \hat{I}_2$$

a dále rovnice

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \cosh \hat{\gamma} l - \hat{Z}_0 \hat{I}_1 \sinh \hat{\gamma} l \tag{43}$$

$$\hat{I}_2 = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_0} \sinh \hat{\gamma} l + \hat{I}_1 \cosh \hat{\gamma} l \tag{44}$$

Často se v praxi vyskytuje opačná úloha, zjistit hodnoty napětí a proudu na počátku vedení, známe-li (nebo požadujeme určité hodnoty) velikosti proudu a napětí na konci vedení. Pak lze rovnice zapsat v maticovém tvaru

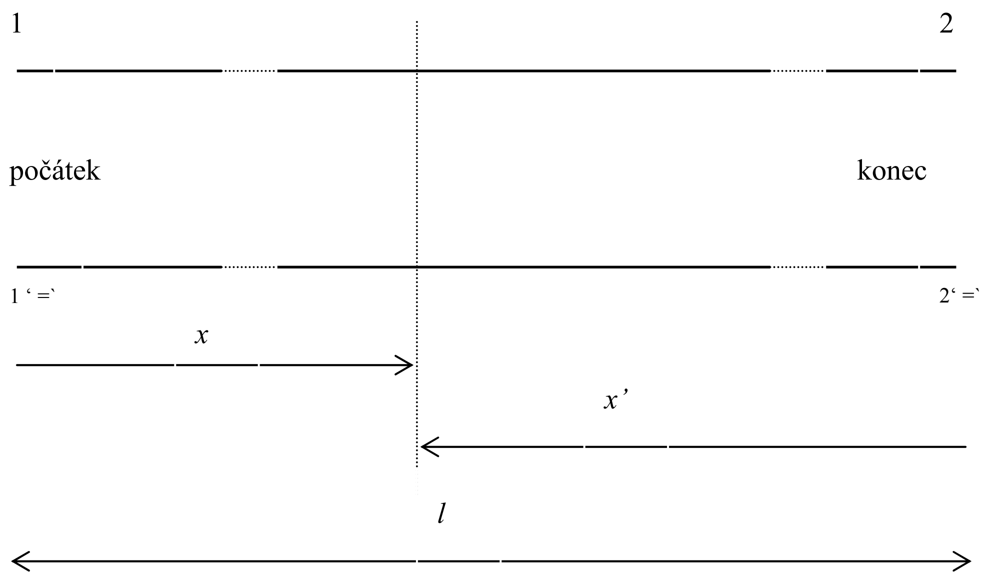
$$\begin{vmatrix} \hat{U}_2 \\ \hat{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh \hat{\gamma} l & -\hat{Z}_0 \sinh \hat{\gamma} l \\ -\dfrac{1}{\hat{Z}_0} \sinh \hat{\gamma} l & \cosh \hat{\gamma} l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{vmatrix}$$

Pomocí Kramerova pravidla dostaneme

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2 \cosh \hat{\gamma} l + \hat{Z}_0 \hat{I}_2 \sinh \hat{\gamma} l \tag{45}$$

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} \sinh \hat{\gamma} l + \hat{I}_2 \cosh \hat{\gamma} l \tag{46}$$

Dosadíme-li do těchto rovnic místo délky vedení l vzdálenost od konce vedení $x' = l - x$ podle *obr. 3*, dostaneme rovnice, které umožňují se známých hodnot na konci vedení vypočíst napětí a proud v libovolném místě x' od konce vedení.



Obr. 3 *Symbolické znázornění vedení*

$$\hat{U}(x') = \hat{U}_2 \cosh \hat{\gamma} x' + \hat{Z}_0 \hat{I}_2 \sinh \hat{\gamma} x' \tag{47}$$

$$\hat{I}(x') = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0}\sinh\hat{\gamma}\,x' + \hat{I}_2\cosh\hat{\gamma}\,x' \tag{48}$$

Tyto rovnice můžeme vyjádřit také pomoci exponenciálních funkcí

$$\hat{U}(x') = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{Z}_0\,\hat{I}_2\right)e^{\hat{\gamma}\,x'} + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 - \hat{Z}_0\,\hat{I}_2\right)e^{-\hat{\gamma}\,x'} \tag{49}$$

$$\hat{I}(x') = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\right)e^{\hat{\gamma}\,x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} - \hat{I}_2\right)e^{-\hat{\gamma}\,x'} \tag{50}$$

Rovnice (37), (38), (41), (42), (49) a (50) nazýváme rovnicemi vedení s rozprostřenými parametry. Umožňují nám určit napětí a proud na konci vedení. To je vyjadřuje matematický význam rovnic vedení. Fyzikální význam rovnic bude vysvětlen v další kapitole.

Text k prostudování

[1] Székely,J.: Teoretická elektrotechnika I, druhý diel. Alfa, Bratislava 1979, s.45 - 72

[2] Szekély,J., Perény,M.: Príklady z teoretickém elektrotechniky - Riešenie obvodov, skripta VŠD v Žilině, s.265 – 277

Další studijní texty

[3] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981

? Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Které elektrické soustavy nelze modelovat obvody se soustředěnými parametry?

2. Za jakých podmínek lze i na tyto soustavy uplatnit principy používané více v teorii obvodů než v teorii elektromagnetického pole?

3. Uveďte primární parametry dlouhého vedení.

4. Napište telegrafní rovnice a výchozí rovnice pro jejich odvození.

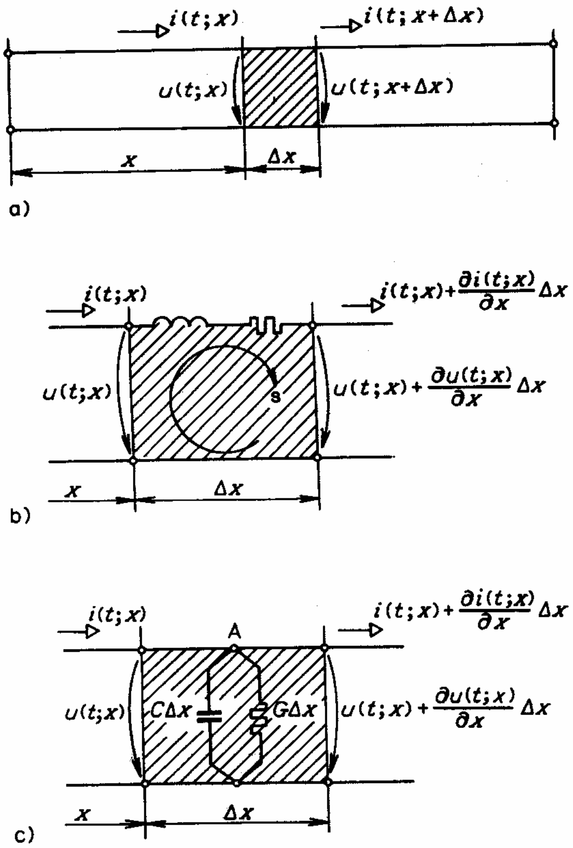
5. Které další jevy a přeměny energií vznikají na skutečném elementu vedení?

Odpovědi na otázky:

1. Jedná se o soustavy, u nichž nelze předpokládat, že můžeme oddělit elektrickou a magnetickou energii do prostorově malých částí obvodů. Projevuje se u nich konečná rychlost šíření elektromagnetického pole a je tedy potřeba uvažovat i geometrické uspořádání soustavy.

2. Pro řešení soustav z bodu 1. můžeme použít postupy z teorie obvodů, avšak prvky obvodu již nebudou prostorově soustředěné, nýbrž budou spojitě rozloženy v prosatoru a napětí a proud jsou nejen funkcemi času, ale též geometrických souřadnic. Dlouhé vedení je tedy geometricky jednorozměrným vedením. Předpokládáme, že příčné rozměry vodičů a jejich vzájemná vzdálenost jsou mnohem menší, než délka vedení.

3. Vedení charakterizují čtyři primární parametry udávané na jednotku délky vedení (obvykle na 1 km): měrný odpor ρ a měrná indukčnost λ smyčky tvořené dvojicí vodičů, měrná kapacita c a měrná vodivost (svod) γ mezi oběma vodiči. O primárních parametrech předpokládáme, že nemění svoji velikost podél vedení – vedení pak nazýváme homogenní.



4. Podle obrázku si vymezíme ve vzdálenosti x od začátku elementární dvojbran. Veličiny ve vzdálenosti Δx odpovídají Taylorově řadě:

$$u(t;x+\Delta x) \doteq u(t;x) + \frac{\partial u(t;x)}{\partial x}\Delta x$$

$$i(t;x+\Delta x) \doteq i(t;x) + \frac{\partial i(t;x)}{\partial x}\Delta x$$

Po úpravě dostaneme základní rovnice vedení:

$$-\frac{\partial u(t;x)}{\partial x} = R_0 i(t;x) + L_0 \frac{\partial i(t;x)}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i(t;x)}{\partial x} = G_0 u(t;x) + C_0 \frac{\partial u(t;x)}{\partial t}$$

Řešením je napětí a proud v kterémkoliv místě x homogenního vedení v kterémkoliv okamžiku t. Rovnice upravíme tak aby zahrnovaly jen jednu neznámou veličinu (jen i nebo jen u) – telegrafní rovnice:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_0 G_0 u + (L_0 G_0 + R_0 C_0)\frac{\partial u}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + R_0 G_0 i + (L_0 G_0 + R_0 C_0)\frac{\partial i}{\partial t} + L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

5. Z nevratných změn jsou to ztráty v dielektriku vyvolané jeho polarizací a magnetizací. První jsou úměrné časové změně intenzity elektrického pole (napětí mezi vodiči), a lze je zahrnout do příčné vodivosti, druhé (např. ve feritu dielektrika) jsou úměrné časové změně intenzity magnetického pole, tj. proudu a zahrnují se do podélného odporu *R*. V rámci indukčnosti *L* není rovněž zahrnuto pole uvnitř vodičů, které lze respektovat zvětšením *L* o tzv. vnitřní indukčnost. Vůbec se neuvažuje magnetické pole příčných posuvných proudů (příčná indukčnost) a elektrické pole ve směru osy vodičů (podélná kapacita). Tato pole jsou obvykle zanedbatelná, neboť změna *u(x),i(x)* podél vedení probíhá velmi pozvolna ve srovnání s příčnou vzdáleností vodičů.

Úlohy k řešení

1. Na vedení dlouhé l = 100 km je připojen odpor R = 10^3 Ω. Jaké je na něm napětí, nje-lina počátku vedení stejnosměrné napětí U_1 = 220 V. Parametry vedení jsou R_0 = 9 Ω/km, G_0 = 10^{-5} S/km.

2. Vedení pro stejnosměrný proud o délce l = 800 km bylo na konci zkratováno, přičemž se naměřily hodnoty:

I_{2k} = 2 A, I_{1k} = 8 A, U_{1k} = 100 V

Určete charakteristický (vlnový) odpor R_v a činitel tlumení β.

KLÍČ K ŘEŠENÍ

1. Napětí U2 obdržíme z rovnice $U_1 = U_2 \cosh \beta l + R_v I_2 \sinh \beta l$, kde *R*v je charakteristický odpor vedení. Dosadíme-li $I_2 = U_2 / R_0$ bude

$$U_2 = \frac{U_1}{\cosh \beta l + \frac{R_v}{R_0}\sinh \beta l} = \frac{220}{1{,}486 + \frac{950}{1000}.1{,}099} = 87{,}1V$$

přičemž jsme dosadili $R_v = \sqrt{R_0/G_0} = \sqrt{9/10^{-5}} = 950\,\Omega$

$$\beta = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{9.10^{-5}} = 0{,}95.10^{-2}\ Np/km$$

$b = \beta.l$ = 0,95 Np

Při zanedbání svodu vedení vyplývá napětí U_2' z Ohmova zákona

$$U_2' = \frac{U_1}{R_0 + R_v} \cdot R_0 = \frac{220}{1000 + 950}1000 = 113V$$

Odchylka od správného výpočtu (při zanedbání svodu) je asi 30%.

2. Z rovnic pro vedení $U_1 = U_2 \cosh \beta l + R_v I_2 \sinh \beta l \qquad I_1 = I_2 \cosh \beta l + \frac{U_2}{R_v}\sinh \beta l$

plyne pro náš případ $U_{1k} = R_v I_{2k} \sinh \beta l$

$$I_{1k} = I_{2k} \cosh \beta l \Rightarrow a = \frac{I_{1k}}{I_{2k}} = \cosh \beta l = \frac{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$e^{\beta l} + e^{-\beta l} = 2a$ vynásobením $e^{\beta l}$ obdržíme vztah

$e^{2\beta l} - 2ae^{\beta l} + 1 = 0$ který je kvadratickou rovnicí pro hledané $e^{\beta l}$ s řešením

$$e^{\beta l}_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Je možné jen pro $a \geq 1$ a vzhledem k tomu, že pro pasivní vedení je $\beta \rangle 0$, může být před odmocninou jen kladné znaménko $e^{\beta l} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. Z toho

$$\beta = \frac{1}{l} \cdot \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) = \frac{1}{800} \cdot \ln\left(4 + \sqrt{4^2 - 1}\right) = 0{,}00258\, Np / km$$

Z rovnice $U_{1k} = R_v I_{2k} \sinh \beta l \Rightarrow R_v = \frac{U_{1k}}{I_{2k}} \cdot \frac{1}{\sinh \beta l} = \frac{U_{1k}}{I_{2k}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{100}{8} \frac{1}{\sqrt{4^2 - 1}} = 12{,}9\Omega$

Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň **9** bodů, je možno přejít ke studiu jiných témat. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.

Zadání samostatné práce č. 7:

1. Zvolte číselné hodnoty primárních parametrů vedení a pro ně vyjádřete komplexní efektivní hodnoty proudu a napětí vedení.

8. Analýza jednofázového homogenního vedení při harmonickém napájení, stav naprázdno a nakrátko, odrazy vln.

Čas ke studiu: 6 hodin

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět:

- posoudit chování vedení z hlediska jeho délky a frekvence napájení
- odvodit obecné rovnice homogenního vedení pro harmonický ustálený stav
- na základě analýzy jednofázového homogenního vedení rozlišovat poměry na vedení na konci otevřeném, zkratovaném a zatíženém impedanci, která je rovna charakteristické impedanci vedení

Výklad

8.1 Fyzikální interpretace rovnic vedení s rozprostřenými parametry

Vedení (také nazýváno linka) je pasivní prvek, který zajišťuje přenos energie. Elektromagnetická energie přenášená dvěma paralelními vodiči se šíří v prostoru mezi těmito vodiči, přičemž vlastní vodiče určují směr přenosu této energie. Prostor kolem vodičů může být tvořen vzduchem nebo jiným dielektrikem. Vedení je na začátku napájeno budícím harmonickým napětím $u = U_m \sin \omega t$. Pomineme-li jistou fikci - nekonečně dlouhé vedení, mohou nastat tyto typické případy: vedení je přizpůsobeno, vedení je zakončeno (nejčastěji) nějakou obecnou impedancí, zkratem nebo může být na konci otevřené. Jak je známo z teorie obvodů je vliv prostředí obklopující vodiče zahrnut do parametru vlnová impedance. Každá nehomogenita prostředí a to včetně zakončení vodičů vede k odrazům vln postupujícím po vedení a ke změnám amplitudy a fáze prostupující vlny.

V minulé kapitole jsme se soustředili na diskontinuitu vedení v podélném směru, a to v místě zakončení vedení. Zajímali jsme se pouze dlouhým vedením, to je takovým, které svou délkou přesahuje délku vlny, nebo je s touto délkou srovnatelné, čili vedením s rozprostřenými parametry. Byly zde odvozeny rovnice pro vedení s rozprostřenými parametry a objasněn jejich matematický význam. Nyní si povšimněme i fyzikálního významu těchto rovnic. Vyjděme z rovnic

$$\hat{U}(x') = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{Z}_0 \hat{I}_2\right)e^{\hat{\gamma} x'} + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 - \hat{Z}_0 \hat{I}_2\right)e^{-\hat{\gamma} x'} \tag{1}$$

$$\hat{I}(x') = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} + \hat{I}_2\right)e^{\hat{\gamma} x'} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_0} - \hat{I}_2\right)e^{-\hat{\gamma} x'} \tag{2}$$

Vidíme, že výrazy pro proud a pro napětí jsou formálně stejné a skládají se ze součtu dvou složek. Zkoumejme nejprve jen fyzikální význam první složky. Vidíme, že první složka může existovat i samostatně, je-li druhá složka nulová. To nastane tehdy, když je $\hat{U}_2 = \hat{Z}_0 \hat{I}_2$, tj. je-li zatěžovací impedance daná Ohmovým zákonem jako podíl napětí a proudu na konci vedení

$$\hat{Z}_z = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} = \hat{Z}_0 \tag{3}$$

Obr. 1 *Výkonově přizpůsobené vedení*

Takto zatížené vedení se nazývá výkonově přizpůsobené vedení. Pro něj mají rovnice (1) a (2) tvar:

$$\hat{U}(x') = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{U}_2\right)e^{\hat{\gamma}x'} = \hat{U}_2\, e^{\hat{\gamma}x'} \tag{4}$$

$$\hat{I}(x') = \frac{1}{2}\left(\hat{I}_2 + \hat{I}_2\right)e^{\hat{\gamma}x'} = \hat{I}_2\, e^{\hat{\gamma}x'} \tag{5}$$

Rovnice dosvědčují náš předpoklad, že napětí a proud mají jen první složku, druhá je nulová. Dosadíme-li do těchto rovnic za *x*’ = *l*, dostaneme vstupní hodnoty $\hat{U}_1, \hat{I}_1$ vyjádřené pomocí výstupních hodnot $\hat{U}_2, \hat{I}_2$

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_2\, e^{\hat{\gamma} l} \qquad \hat{I}_1 = \hat{I}_2\, e^{\hat{\gamma} l} \tag{6}$$

Podobně můžeme z těchto vztahů vyjádřit vstupní hodnoty pomocí hodnot výstupních

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1\, e^{-\hat{\gamma} l} \qquad \hat{I}_2 = \hat{I}_1\, e^{-\hat{\gamma} l} \tag{7}$$

Dosadíme-li do (7) místo délky vedení *l* souřadnici *x*, počítanou od počátku vedení, dostaneme rovnice

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1\, e^{-\hat{\gamma} x} \qquad \hat{I}(x) = \hat{I}_1\, e^{-\hat{\gamma} x} \tag{8}$$

vyjadřující změnu napětí a proudu podél přizpůsobeného vedení v závislosti na vzdálenosti *x* od počátku vedení. Z komplexní činitel vedení dosadíme

$$\hat{\gamma} = \beta + j\alpha \tag{9}$$

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1 e^{-(\beta + j\alpha)x} = \hat{U}_1 e^{-\beta x} e^{-j\alpha x} = U_1 e^{-\beta x} e^{-j[\nu_{U1} - \alpha x]} \tag{10}$$

8.2 Další způsoby zatížení vedení

Jak již bylo řečeno, na vedení mohou nastat tyto typické případy:

a) Vedení je zatíženo impedancí rovnou vlnové impedanci tohoto vedení. Potom se jedná o vedení přizpůsobené a vlna se od takovéto zátěže neodráží.

b) Vedení je zatíženo obecnou impedancí Z_z.

c) Vedení je na konci zkratováno, tedy zatíženo nulovou impedancí. V tomto případě musí být úbytek napětí na takovéto impedanci nulový. Obecně však postupná vlna nulového napětí na konci nedosahuje. Musí zde tedy vzniknout vlna zpětná, s opačně orientovanou stejně velkou hodnotou napětí. Obě složky se spolu sčítají tak, aby výsledné napětí na konci vedení nulové skutečně bylo. Případ je analogický s dopadem vlny na povrch dokonalého vodiče, kde musí být také nulová hodnota intenzity elektrického pole. Při dokonalém zkratu (destičkou kolmou na osy vodičů - vektor rovinné vlny **E** je rovnoběžný s touto destičkou) vzniká jen dominantní vid (základní harmonická) zpětné vlny. U nedokonalého zkratu rozměrných vodičů (např. tenkým drátkem) má pole v místě zkratu složitější tvar, s tím, že na drátku musí být opět nulové napětí. Toho lze docílit jen tak, že v místě zkratu vznikají vyšší vidy elmag. vln, které jsou však na velmi krátké vzdálenosti od místa zkratu utlumeny. Podél vedení na konci zkratovaného, vzniká stojatá vlna s nulami a kmitnami (maxima napětí) umístěnými v geometricky konstantních místech.

Zkrat na konci vedení se může nahradit fiktivním zdrojem, který dává opačně polarizované napětí (znaménko -), to ale znamená, že proudová odražená vlna musí být ve fázi s přímou proudovou vlnou (znaménko +). Pro výslednou stojatou vlnu tedy můžeme psát:

$$u(t,x) = U_{\mathrm{m}} \left[\overset{\text{zpětná}}{\cos\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} - \overset{\text{přímá}}{\cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right] = -2U_{\mathrm{m}} \sin\omega t \cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}x \tag{10}$$

$$i(t,x) = I_{\mathrm{m}} \left[\overset{\text{zpětná}}{\mathbf{cos}\,\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)} + \overset{\text{přím}}{\mathbf{cos}\,\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right] = 2I_{\mathrm{m}} \cos\omega t \cdot \mathbf{cos}\frac{2\pi}{\lambda}x \tag{11}$$

d) Vedení je na konci otevřeno, tedy zatíženo nekonečnou impedancí. Takovouto impedancí neprotéká proud. Postupná vlna proudu se tedy musí od nehomogenity (rozpojené vedení) odrazit s opačnou fází. Vzniká opět stojatá vlna.

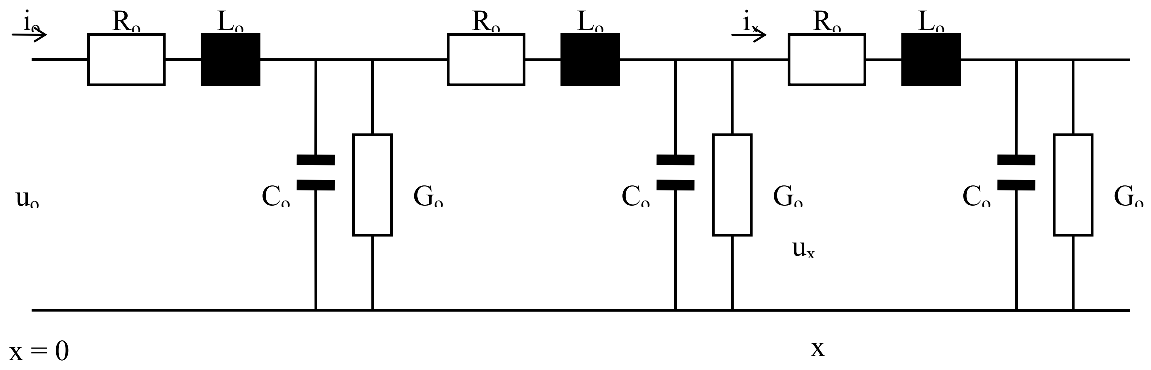
Pro výslednou stojatou vlnu platí analogicky se zkratem:

$$i(t,x) = I_{\mathrm{m}} \left[\mathbf{cos}\,\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) - \mathbf{cos}\,\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] = 2I_{\mathrm{m}} \sin\omega t \cdot \mathbf{sin}\frac{2\pi}{\lambda}x \tag{12}$$

$$u(t,x) = U_{\mathrm{m}} \left[\mathbf{cos}\,\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \mathbf{cos}\,\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] = -2U_{\mathrm{m}} \cos\omega t \cdot cos\frac{2\pi}{\lambda}x \tag{13}$$

Lecherovým vedením (Lecherovými dráty) nazýváme tzv. rezonanční vedení se zanedbatelnými ztrátami, na konci zkratované, jehož délka je $n.\lambda$ nebo $n.\lambda/2$ (n je celé číslo), případně ji můžeme na tyto délky přestavovat posuvným zkratem. Rezonančním vedením je nazváno vedení se stojatými vlnami, tj. vedení zakončeno jinak než činným odporem rovným charakteristické impedanci. Lecherovy dráty se užívají při experimentech s proudy velmi vysokých frekvencí. Kmitny napětí na rezonujícím vedení se vyskytují v místech uzlů proudů a naopak. Maximum napětí a nejbližší maximum proudu na vedení jsou tedy od sebe vzdáleny vzájemně o $\lambda/4$, maxima napětí respekt. proudu jsou od sebe vzdáleny o $\lambda/2$, z čehož lze vypočíst frekvence zdroje.

Dlouhé dvojvodičové vedení (tj. vedení delší než je délka vlny jím přenášeného signálu) si můžeme nahradit kaskádně spojenými články podle *obr. 2*.



***Obr. 2** Kaskádní spojení článků*

Sériové členy R_o a L_o způsobují zmenšování přenášeného napětí, příčné členy C_o a G_o způsobují zmenšování proudu. Proud v těchto členech je tím menší, čím jsou členy vzdálenější od počátku vedení. Proto také na začátku vedení klesá napětí a proud přenášeného signálu daleko rychleji, než v dalších úsecích a výsledné napětí se nezmenšuje lineárně ale exponenciálně.

Přenos energie by měl probíhat s minimálními ztrátami. Pro posouzení ztrát jsme zavedli komplexní činitel vedení (6.9) který se ve sdělovací technice nazývá míra přenosu (také nazývána konstanta šíření). Reálnou složku β nazýváme činitel útlumu nebo také měrný útlum či konstanta útlumu, imaginární α je fázová konstanta vedení nebo také nazývána měrný posuv. Měrný útlum se praxi udává většinou v dB/m, ve starších literaturách v neperech/m (přepočet 1N = 8,68 dB).

Měrný posuv α nám říká, o kolik stupňů je na jednotku délky vedení pootočen vektor napětí proti napětí na počátku vedení. Určuje tedy také délku vlny na vedení.

$$\alpha = \omega\sqrt{L_0 \cdot C_0} \tag{14}$$

Vektor napětí u se natočí o 2π (v rad) neboli 360° na vzdálenosti délky vlny λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \tag{15}$$

Vydělíme-li délku vlny dobou kmitu T dostáváme rychlost šíření vlny na vedení

$$\mathrm{v} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \tag{16}$$

nebo

$$v = f \cdot \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(L_0 C_0)}}$$

Vlnová impedance (charakteristická impedance) vedení je vlastně analogická odporu, který vedení klade střídavému proudu. Za předpokladu zanedbání parametrů R_o a G_o je

$$Z_v = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{17}$$

Porovnáme-li vlnovou impedanci vedení uloženého ve vzduchu Z_v s vlnovou impedancí stejného vedení umístěného v dielektriku s permitivitou ε (označ. Z'_v) potom

$$Z_v' = \frac{Z_v}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{18}$$

Vzduchové dvojvodičové vedení mívá větší indukčnost než kabelová dvojlinka, protože vzdálenost vodičů ve vzduchu je zpravidla větší než u dvojlinky, a jak známo ve vztahu pro výpočet indukčnosti dvojvodičového vedení figuruje vzdálenost vodičů v čitateli logaritmu. Naopak permitivita, a tedy i kapacita dvojlinky je větší než u vzduchu. Obecně tedy bývá vlnová impedance počítána ze vztahu (17) menší u kabelových vedení než u vedení ve vzduchu.

Jak již bylo řečeno, zmenšuje se zároveň vlnová délka na vedení. $\lambda' = \lambda / \sqrt{\varepsilon} = K.\lambda$, kde K je součinitel zkrácení. Vzhledem ke „zkrácení" vlnové délky dielektrikem bude elektrická délka l_e takového vedení vždy větší než jeho délka geometrická l_g.

$$l_e = l_g / K \tag{19}$$

Při zjišťování této impedance měřením musíme mít konec vedení při měření kapacity rozpojen, při měření indukčnosti zkratován. Od naměřených hodnot odečteme kapacitu (krokosvorky rozpojeny) a indukčnost (krokosvorky zkratovány) přívodu. Problematické je měření indukčnosti při nižších frekvencích např. u LCRG metru BM591 na rozsahu 1000Hz. V tomto případě je u dvojlinky i koaxiálu již u délky kolem 1m činný odpor vedení větší než induktivní reaktance ωL vedení. Pokud měříme indukčnost na vedení geometricky krátkém je výhodné měřit při vyšší frekvenci. Frekvence by ale neměla být natolik vysoká, aby se projevoval nadmíru vliv kapacit. Při optimální frekvenci by měla induktivní reaktance převyšovat hodnotu činného odporu asi stokrát.

Charakteristickou impedanci vedení lze také určit na základě měření impedance vzorku nakrátko Z_k a naprázdno Z_o (na konci otevřeného). Potom vypočteme charakteristickou impedanci jako geometrický střed těchto hodnot

$$Z_v = \sqrt{Z_0 \cdot Z_k} \tag{20}$$

Vztah platí přesně u vedení geometricky krátkých s malým činným odporem (vzhledem k indukčnosti). U vedení geometricky dlouhých s velkým útlumem jsou hodnoty Z_o a Z_k srovnatelné. Jejich rozdíl je velmi malý a výpočet obtížný.

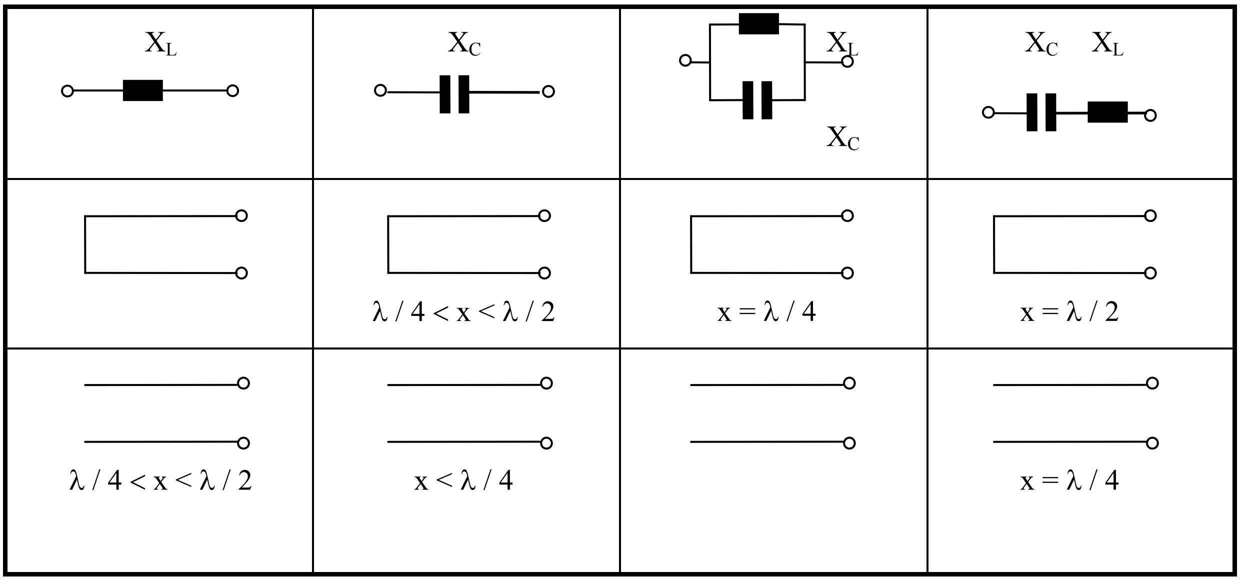
Vf vedení může být v podstatě buď symetrické (dvojlinka) nebo nesymetrické (koaxiální kabel), existuje řada modifikací v závorkách uvedených základních typů. Jak již bylo řečeno, mění se jejich vstupní impedance podle délky vedení, tedy podle vyladění linky. Při zkratovaném vedení dosáhne vstupní impedance hodnoty

$$Z_v = j\, Z_o.\mathrm{tg}\ \alpha, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{360}{\lambda} \tag{21}$$

a při otevřeném vedení

$$Z_v = -\, j\, Z_o.\mathrm{cotg}\ \alpha \tag{22}$$

Z těchto výrazů vyplývá, že vedení na konci zkratované, kratší než λ/4 má charakter indukční atd. v souladu *tab. 1*:



Tab. 1 *Charakter impedance bezeztrátového vedení v závislosti na jeho délce*

Vedení délky λ/2 (nebo násobky) působí jako **opakovač impedance** (transformuje impedanci 1:1), tzn., že bez ohledu na velikost vlnového odporu takovéhoto vedení bude mít vedení zakončené odporem R_z vstupní impedanci stejnou jako je odpor na konce vedení

$$R_v = R_z$$

Tohoto jevu využíváme při měření impedance na těžko dostupném místě (kde se nedostaneme s měřicím můstkem). Neznámou impedanci připojíme k můstku vedením λ/2 a změříme impedanci v místě připojení na můstek. Ta je stejná jako impedance měřená.

U vedení délky λ/4 (a lichých násobků) platí pro vlnovou impedanci Z_o, impedanci zátěže na konci kabelu Z_z a impedanci vstupní (na začátku kabelu) Z_v vztah:

$$Z_v = \frac{Z_0^2}{Z_z} \tag{23}$$

Jinak řečeno impedance Z_v a Z_z nebo odpory R_v a R_z lze vzájemně přizpůsobit vedením dlouhým λ/4 o impedanci:

$$Z_0 = \sqrt{Z_v \cdot Z_z} \qquad \text{nebo} \qquad Z_0 = \sqrt{R_v \cdot R_z} \tag{24}$$

Text k prostudování

[1] Székely,J.: Teoretická elektrotechnika I, druhý diel. Alfa, Bratislava 1979, s. 72 - 90

[2] Mikulec, M.; Havlíček, V.: Základy teorie elektrických obvodů II. Skriptum ČVUT Praha 1999

Další studijní texty

[3] Černohorský, D., Svačina, J., Raida,Z.: Elektromagnetické vlny a vedení, PC-DIR spol. s r.o. – Nakladatelství Brno, 1995 s. 38-50.

[4]Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL/ALFA, Praha 1981

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

1. Uveďte telegrafní rovnice pro homogenní vedení s ustálenými harmonickými proudy.

2. Jaký obvyklý tvar má řešení telegrafních rovnic pro fázory?

3. Která veličina slouží na jednofázovém dlouhém vedení k posouzení ztrát?

4. Uveďte vztah pro vlnovou impedanci vedení.

Odpovědi na otázky:

1. $\dfrac{d^2 \hat{U}(x)}{dx^2} - (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\hat{U}(x) = 0$

$$\frac{d^2 \hat{I}(x)}{dx^2} - (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)\hat{I}(x) = 0$$

2. $\hat{U}(x) = \hat{A}e^{\gamma x} + \hat{B}e^{-\gamma x}$, kde první člen na pravé straně popisuje vlnu odraženou, druhý člen vlnu přímou

3. Pro posouzení ztrát se zavádí ve sdělovací technice tzv. míra přenosu (také nazývána konstanta šíření)

$$\hat{\gamma} = \beta + j\alpha$$

která je obecně komplexní veličinou. Reálnou složku β nazýváme měrný útlum (konstanta útlumu), imaginární α měrný posuv.

4. Vlnová impedance Z_v je spolu s konstantou šíření nazývána provozními parametry homogenního vedení.

$$\hat{Z}_v = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Autokontrola

Pokud jste získali z kontrolních otázek a příkladů alespoň 9 bodů, je možno přejít ke studiu jiných témat. V opačném případě je nutné kapitolu znovu prostudovat a opakovaně vypracovat odpovědi na kontrolní otázky.

Zadání samostatné práce č. 8:

1. Zobrazte průběhy proudů $i(t,x)$ a napětí $u(t,x)$ pro tři časy (např. $t_1 = 0$ s, $t_2 = \frac{T}{4}$ s, $t_3 = \frac{T}{2}$ s) bezeztrátového vedení délky $x = \frac{5\lambda}{4}$ ve stavu naprázdno a nakrátko.

2. Zobrazte graf impedance bezeztrátového vedení délky $x = \frac{5\lambda}{4}$ ve stavu naprázdno a nakrátko.

9. Laboratorní úlohy

9.1 Laboratorní úloha č. 1 - Trojfázové obvody

Zadání:

1. Zapojte do hvězdy jednotlivá vinutí transformátoru tak, aby vznikl souměrný trojfázový zdroj a změřte fázová a sdružená napětí.

2. Změřte obvodové veličiny pro zapojení:

    a) souměrný zdroj symetrický spotřebič Y,

    b) souměrný zdroj nesymetrický spotřebič Y,

    c) nesouměrný zdroj symetrický spotřebič Y,

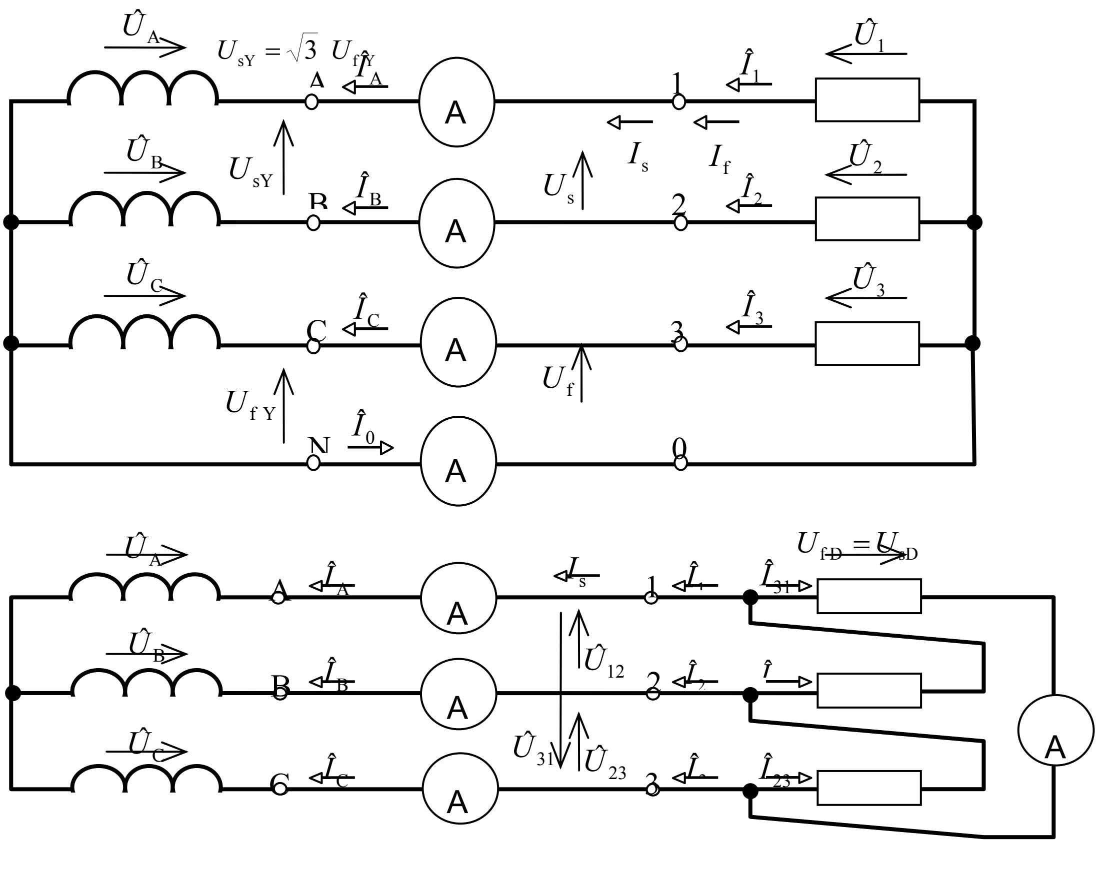
    d) souměrný zdroj symetrický spotřebič D,

3. Nakreslete fázorové diagramy napětí a proudu.

4. Určete činné výkony a posuďte je.

5. Verifikujte vztahy mezi fázovým a síťovým proudem.

Schéma zapojení:



Obr. 1 Schéma zapojení trojfázových obvodů

Upozornění:

Fázory v trojfázových obvodech obvykle zobrazujeme jako fázorové diagramy 2. druhu. Liší se od fázorových diagramů 1. druhu (používaných v 1f obvodech) tím, že rovina komplexních čísel je pootočena o $90°$ a opačnou orientací fázorů. Důvodem je lepší názornost.

Pracovní postup:

ad 1. Doporučuje se vyzkoušet si, jak správně zapojit konec vinutí jednotlivých transformátorů, aby vznikl souměrný trojfázový zdroj zapojený do hvězdy.

Všeobecně k dalším bodům: K měření obvodových veličin je nutno použít 5 měřicích přístrojů. Třemi měříme síťové proudy, jeden používáme jako voltmetr k měření U_0, respektive po přepnutí na proudové rozsahy jako ampérmetr k měření I_0, jeden k měření fázových napětí, resp. měření veličin k verifikaci podle bodu 5. Zátěž realizujeme z výkonových odporníků. Nesouměrný zdroj získáme přeložením konců jednoho vinutí a nesouměrný spotřebič přerušením jednoho síťového vodiče.

ad 2. a) Pozor neexistuje ideální souměrnost, možno naměřit $I_0 \neq 0$, $U_0 \neq 0$.

b) Přerušíme jeden síťový vodič.

c) Buď přehodíme začátek a konec jedné fáze zdroje nebo jednu fázi zdroje spojíme se svorkou 0 spotřebiče a svorku N zdroje s příslušnou svorkou spotřebiče (záměna nulového a síťového vodiče).

d) Zdroj je zapojen do hvězdy.

ad 3) Předpokládáme, že se odporník při daném kmitočtu chová jako rezistor, jinak vycházíme ze známých vztahů resp. vlastností geometrických útvarů, např. trojúhelníku.

ad 4) Všimněte si výkonů zejména v nesouměrných stavech.

9.2 Laboratorní úloha č. 2 – Určování parametrů odporových dvojbranů a kmitočtové charakteristiky RC členů

Zadání:

A. <u>Určování parametrů odporových dvojbranů</u>

Zadání:

1) Z měření naprázdno a nakrátko určete kaskádní parametry všech zapojení.

2) Kaskádní parametry dvojbranů v zapojení a) ověřte výpočtem z kaskádních parametrů dvojbranů v zapojení b) c) – viz kapitola 2, odst. 2.2.4 a 2.4.4.

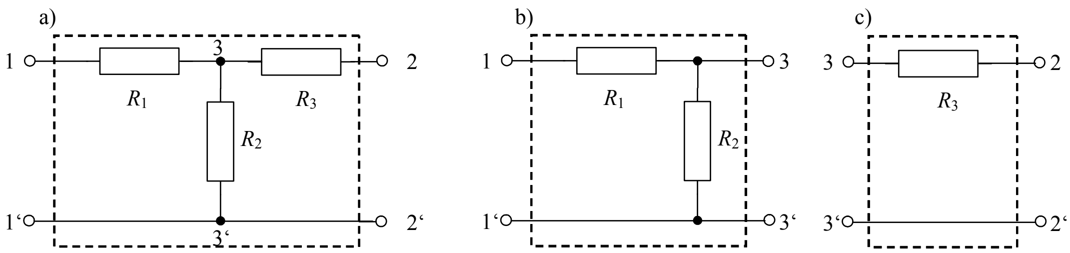
3) Výpočtem určete vstupní a výstupní odpor zapojení a) pro případy: naprázdno, nakrátko a pro obecný zatěžovací odpor.

4) Změřte celkové a dílčí napětí U_R, U_C na nezatíženém *RC* členu v závislosti na kmitočtu.

5) V rovině komplexních čísel zobrazte závislost $\frac{\hat{U}_R}{\hat{U}}$ a $\frac{\hat{U}_C}{\hat{U}}$ při parametru *f* nebo ω.

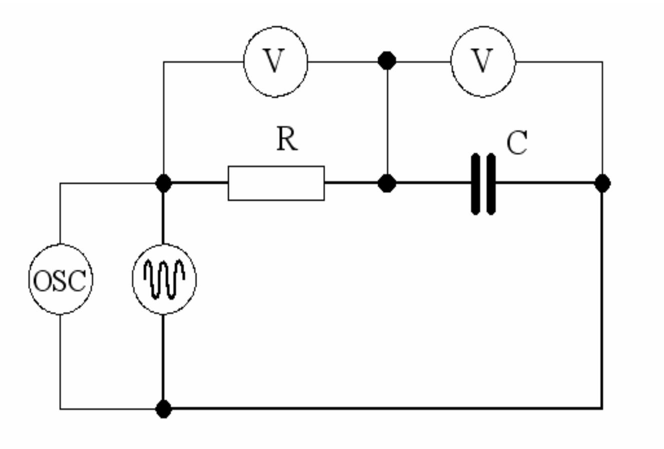
6) V semilogaritmických souřadnicích zakreslete amplitudové a fázové charakteristiky.

Schéma zapojení :



B. Kmitočtové charakteristiky RC členu

Schéma zapojení:



Pracovní postup:

ad 4) V kmitočtovém pásmu cca 50 Hz až 5 kHz měříme napětí univerzálními přístroji. Kmitočet určujte pomocí čítače nebo z periody zjištěné pomocí osciloskopu.

ad 5) Při výpočtech předpokládejte, že technické prvky mají vlastnosti ideálních prvků. Fáze celkového napětí φ = 0. Ostatní vypočítejte ze známých vztahů.

9.3 Laboratorní úloha č. 3 – Měření přenosu zpětnovazební struktury s operačním zesilovačem

Zadání:

1) Na nf generátoru nastavte harmonický průběh výstupního napětí s úrovni signálu $U_{p\text{-}p}$ = 300 mV.

2) Zapojte operační zesilovač jako:

a) Invertující zesilovač podle *obr. 1*.

b) Neinvertující zesilovač podle *obr. 2*.

c) Sledovač signálu podle *obr. 3*.

d) Dolnofrekvenční propust podle *obr. 4*.

e) Hornofrekvenční propust podle *obr. 5*.

Hodnoty rezistorů a kapacitorů volte z rozsahů:

$R_a \in$ <10, 20> kΩ, $R_b \in$ <20, 30> kΩ,

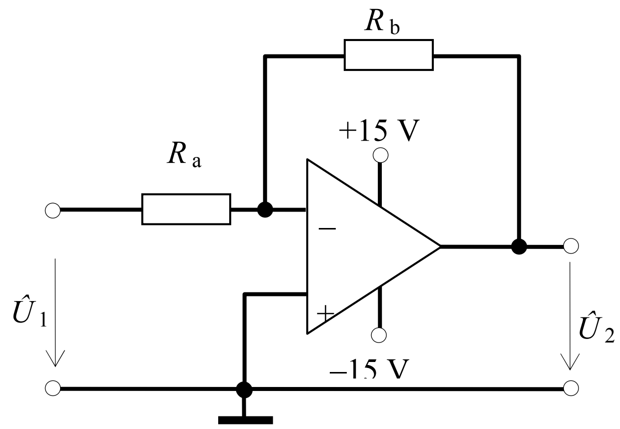
$R_a < R_b$,

$C_a \in$<30, 50> nF, $C_b \in$<7, 14> nF.

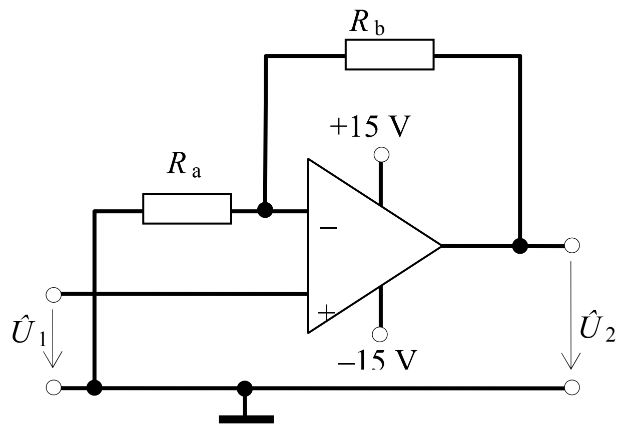
3) Měřením určete napěťové přenosy jednotlivých zapojení v zadaném frekvenčním rozsahu (100, 200, 500, 1000, 2000, 5000, 10 000 a 20 000 Hz). Moduly vstupního a výstupního napětí měřte na dvoukanálovém osciloskopu. Příklad zapojení měřeného obvodu 2a) je na *obr. 6*. Modulové charakteristiky vyneste v semilogaritmických souřadnicích.

4) Určete mezní frekvenci dolnofrekvenční a hornofrekvenční propusti.

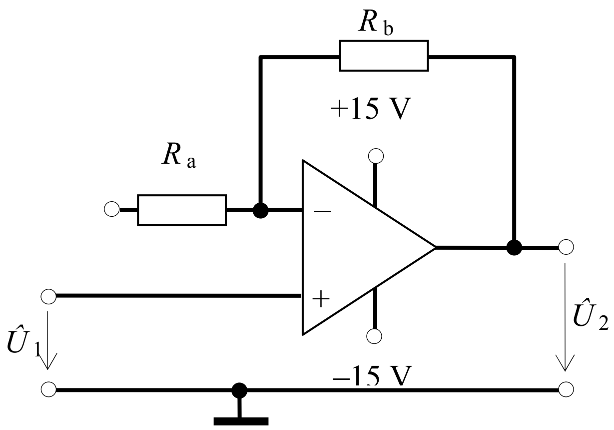
5) Naměřené závislosti porovnejte s matematickými modely.



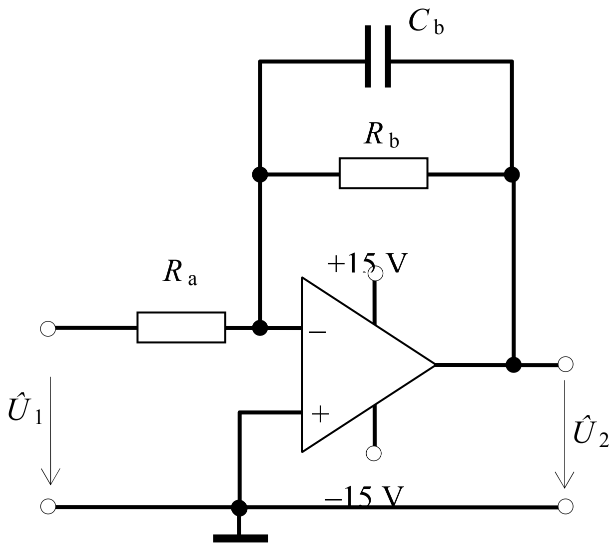
Obr. 1 Invertující zesilovač.



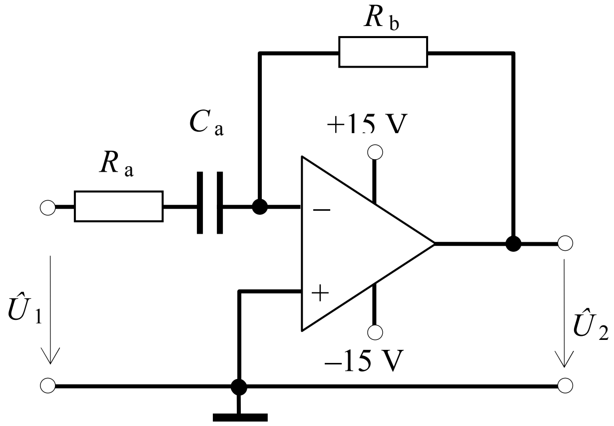
Obr. 2 Neinvertující zesilovač.



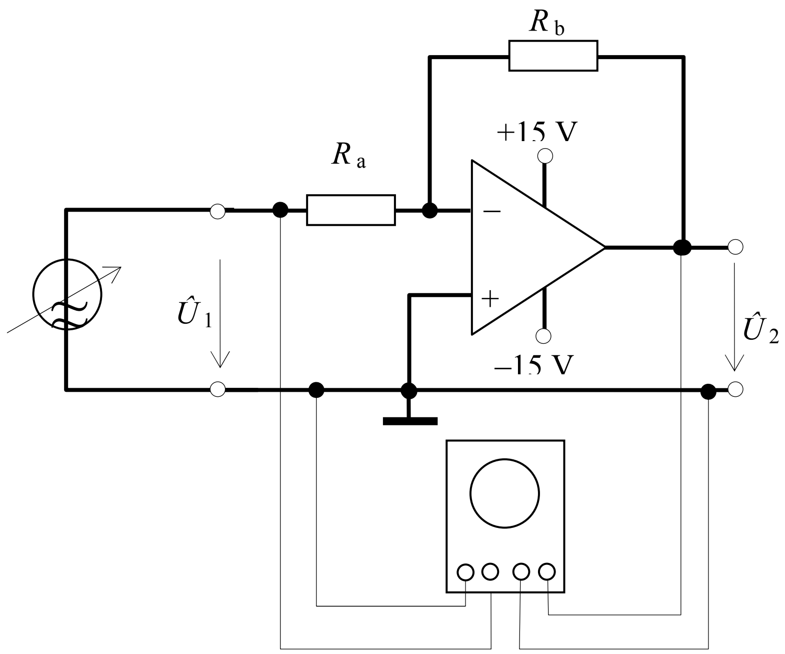
Obr. 3 Sledovač signálu.



Obr. 4 Dolnofrekvenční propust.



Obr. 5 Hornofrekvenční propust.



Obr. 6 Příklad zapojení měřeného obvodu.

Přehled vztahů:

Invertující zesilovač:

$$\hat{F}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = -\frac{R_b}{R_a}$$

Neinvertující zesilovač:

$$\hat{F}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = 1 + \frac{R_b}{R_a}$$

Dolnofrekvenční propust:

$$\hat{F}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = -\frac{R_b}{R_a}\frac{1}{1 + j\omega R_b C_b}$$

Hornofrekvenční propust:

$$\hat{F}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = -\frac{R_b}{R_a}\frac{j\omega R_a C_a}{1 + j\omega R_a C_a}$$

9.4 Laboratorní úloha č. 4 – Přechodné jevy

Úkol: Stanovte rezonanční, vlastní kmitočet a logaritmický dekrement útlumu sériového obvodového modelu elektromagnetického jevu. Získané poznatky verifikujte ve virtuální laboratoři.

Zadání:

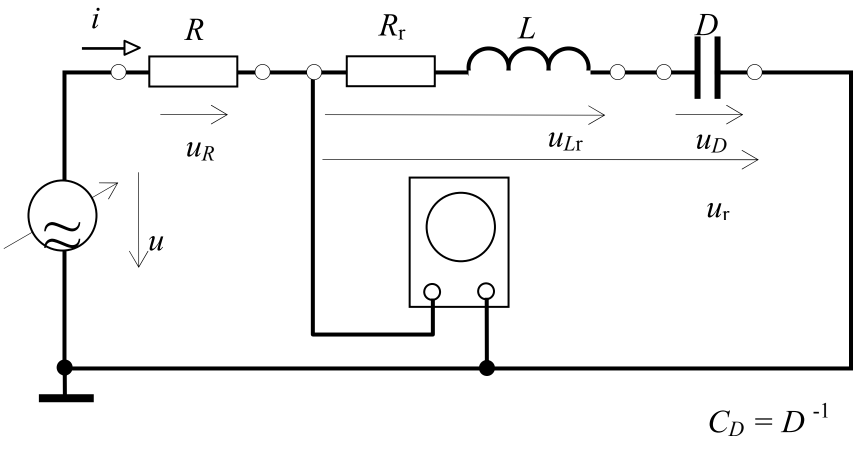
a) Pro harmonické kmity vedené generátorem:

1. Zapojte do série generátor, odporník, cívku a kondenzátor. Napětí měřte osciloskopem podle *obr. 1*.
2. Hodnotu odporu odporníku nastavte v rozsahu $R \in <100, 500>$ Ω a hodnotu kapacity kondenzátoru volte v rozsahu $C_D \in <300, 500>$ nF.
3. Určete rezonanční kmitočet sériového zapojení cívky a kondenzátoru laděním kmitočtu harmonického napětí generátoru.
4. Na rezonančním kmitočtu odečtěte amplitudu napětí generátoru U_{m} a amplitudu společného napětí U_{mr} cívky a kondenzátoru.
5. Odporník modelujte rezistorem s parametrem R a kondenzátor kapacitorem s parametrem C_D.
6. Na rezonančním kmitočtu vypočítejte hodnotu indukčnosti L a ekvivalentního odporu R_{r} cívky.

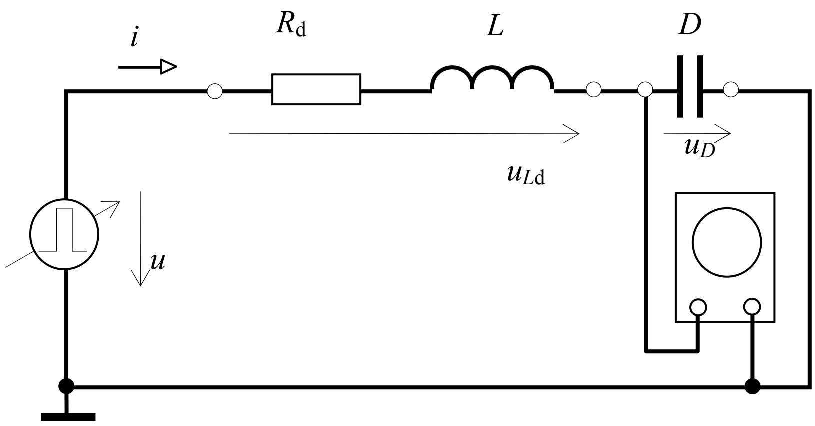
b) Pro superpozici obdélníkových kmitů vedených generátorem a tlumených vlastních kmitů zátěže:

1. Zapojte obvod podle *obr. 2*. Napájejte ho obdélníkovým napětím s vhodně zvolenou hodnotou kmitočtu (asi $f = \frac{f_{\mathrm{r}}}{10}$).
2. Zobrazte průběh přechodného děje napětí kondenzátoru na osciloskopu.
3. Odečtěte z osciloskopu na vhodném časovém intervalu $\Delta t \in \langle t_1, t_1 + nT_{\mathrm{d}} \rangle$ rovnajícímu se celočíselnému násobku n doby periody vlastního kmitočtu T_{d} a hodnoty dvou amplitud tlumených kmitů napětí kondenzátoru $U_{\mathrm{m}D}(t_1)$, $U_{\mathrm{m}D}(t_1 + T_{\mathrm{d}})$.
4. Z odečtených hodnot určete dobu periody tlumených vlastních kmitů T_{d}, logaritmický dekrement útlumu δ, činitel útlumu α, vlastní kmitočet obvodu ω_{d}, ekvivalentní hodnotu odporu cívky R_{d} a hodnotu kritického odporu obvodu R_{krit}.
5. Odporníkem nastavte hodnotu odporu obvodu větší než je hodnota kritického odporu obvodu a zobrazte průběh napětí kondenzátoru přetlumeného přechodného děje.
6. Verifikujte měřené průběhy přechodného děje ve virtuální laboratoři a vhodně zobrazte průběhy proudu, napětí výkonů a energií.
7. Zhodnoťte experiment.

Schéma zapojení:



Obr. 1 Schéma zapojení pro stanovení rezonančního kmitočtu.



Obr. 2 Schéma zapojení pro stanovení logaritmického dekrementu útlumu.

Přehled vztahů:

Rezonanční kmitočet:

$$\omega_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ekvivalentní opor R$_{\boldsymbol{r}}$ cívky:

$$\frac{R_{\mathrm{r}}}{R + R_{\mathrm{r}}} = \frac{U_{\mathrm{mr}}}{U_{\mathrm{m}}}$$

Logaritmický dekrement útlumu:

$$\delta = \ln \frac{U_{\mathrm{m}D}(t_1)}{U_{\mathrm{m}D}(t_1 + T_\mathrm{d})} = \alpha\, T_\mathrm{d}$$

Ekvivalentní odpor R_d cívky:

$$\alpha = \frac{R_\mathrm{d}}{2L}$$

Kritický odpor obvodu:

$$\left(\frac{R_\mathrm{krit}}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$$

Vlastní kmitočet:

$$\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_\mathrm{r}^{2} - \alpha^{2}}$$